

4. Пути усовершенствования схемы

Из предыдущего раздела следует, что при использовании стандартной модели ТСР мы обязательно столкнемся со срывом в сеансе передачи информации. Чтобы избежать этого (по крайней мере для некоторых характерных значений параметров, входящих в уравнение (1)), необходимо модифицировать механизм изменения окна. А именно: пусть

1) в случае успешно переданного пакета увеличение происходит на величину

$$\approx \frac{1}{80} - \frac{1}{\omega}$$

(мы рассматриваем значения $\omega \approx 200$ и не меньше 80);

2) в случае потерянного пакета происходит уменьшение на величину

$$\frac{\omega}{2} - 1 + \frac{2}{\omega}.$$

Тогда, пренебрегая величинами второго порядка малости, приходим к уравнению

$$\frac{d\lambda}{dt} = -(1 + P_L(t)) \frac{m}{R^2} + \left(\frac{1}{80} + P_L(t) \right) \frac{\lambda}{R} - P_L(t) \frac{\lambda^2}{2m}.$$

Дискриминант этого уравнения больше 0 при $P_L < 0.001$, что вполне пригодно для эксперимента, так как характерная вероятность потерь — величина порядка 13%.

Заключение

Таким образом, предложенный нами метод позволил не только показать закономерность наблюдающихся срывов в сеансах, но и создать методику построения более устойчивых модификаций RED алгоритма. Фактически доказано, что в большинстве реализаций ТСР сеансов в контролируемых RED каналах, фазовые портреты имеют особые точки, избежать которые в рамках стандартных механизмов очень сложно. Учитывая практическую невозможность серьезных модификаций RED алгоритмов, выход из создавшегося положения следует, по-видимому, искать во введении дополнительных потерь, когда вероятность P уже нельзя считать постоянной величиной.

Литература

1. Pavlotsky I.P., Sadovnikov B.I., Strianese M. // Preprint Univ. of Salerno, D.M.I. 2002. No. 1.
2. Kuusela P., Lassila P., Virtamo J., Key P. Available from <http://www.tct.hut.fi/tutkimus/com2/publ>. 2002.
3. Павлоцкий И.П., Садовников Б.И., Стрианезе М. // Доклады РАН. Сер. Матем. 2002. **1**, № 2. С. 6.
4. Павлоцкий И.П., Садовников Б.И., Стрианезе М. // Дифф. уравнения. 2002. **38**, № 3. С. 1.

Поступила в редакцию
25.09.02

УДК 517.958:535.4

АНАЛИЗ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РАССЕЙВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Н. В. Гришина, Ю. А. Еремин, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

E-mail: eremin@cs.msu.su

Сделано обобщение метода дискретных источников на случай рассеяния поляризованного светового излучения частицами с экстремальными параметрами. Проведен анализ рассеивающих свойств различных моделей волокон.

Введение

В последнее время возрос интерес к анализу рассеивающих свойств атмосферных частиц с экстремальными параметрами: высоким индексом рефракции, большим соотношением продольного и поперечного размера и пр. Это связано с расширением области применимости оптических средств для интерпретации результатов наблюдений в атмосфере Земли и других планет, а также космической пыли и газа [1]. У экологов большое беспокойство вызывают специфические типы загрязнений, содержащих стекловидные волокна. Наличие даже небольших

концентраций подобных частиц способно привести к серьезным последствиям для здоровья. При интерпретации результатов оптических наблюдений процессов рассеяния использование математического моделирования исследуемых явлений оказывается эффективным. До недавнего времени наиболее распространенным средством анализа рассеивающих свойств частиц являлся метод T -матриц [2]. Однако даже после многочисленных модификаций этот метод не позволяет проводить анализ рассеивающих свойств вытянутых частиц, если соотношение продольного и поперечного размеров превышает 20. Значительно более полные результаты математи-

ческого моделирования рассеяния света частицами с экстремальными характеристиками удается получить при использовании современных компьютерных технологий, основанных на методе дискретных источников [3].

В настоящей работе предлагается модификация метода дискретных источников (МДИ), которая позволяет проводить анализ сильно вытянутых диэлектрических частиц, а также рассеивателей с высоким индексом рефракции. На основе вычислительного эксперимента показано, что различные математические модели волоконных частиц сфероидальная и цилиндрическая приводят к различным результатам. Последнее обстоятельство должно учитываться при интерпретации результатов наблюдений.

Математическая модель задачи рассеяния

Рассмотрим математическую постановку задачи. Пусть $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ — поле линейно поляризованной плоской электромагнитной волны, падающей под углом $\pi - \theta_0$ относительно оси вращения осесимметричной однородной частицы D_i с гладкой поверхностью $\partial D_i \in C^{(1,\alpha)}$. Внешнюю по отношению к частице область обозначим D_e , тогда математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\zeta &= ik\varepsilon_\zeta \mathbf{E}_\zeta, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_\zeta &= -ik\mu_\zeta \mathbf{H}_\zeta, \\ \mathbf{n}_i \times \begin{cases} (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_e(p)) = 0, \\ (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_e(p)) = 0, \end{cases} & p \in \partial D_i \end{aligned} \quad (1)$$

условия излучения для рассеянного поля на бесконечности, где $\{\mathbf{E}_\zeta, \mathbf{H}_\zeta\}$ — полное поле в соответствующей области, \mathbf{n}_i — единичный вектор нормали к поверхности ∂D_i . Отметим, что в области D_e полное поле включает в себя падающую плоскую волну, а также поле, рассеянное частицей. Полагаем, что параметры среды внутри частицы удовлетворяют условиям $\operatorname{Im} \varepsilon_i \leq 0$, $\operatorname{Im} \mu_i \leq 0$, что соответствует временной зависимости вида $\exp\{i\omega t\}$. Тогда граничная задача (1) имеет единственное решение.

Для построения приближенного решения граничной задачи (1) будем использовать МДИ [4]. Суть МДИ состоит в представлении полей в виде конечных линейных комбинаций полей диполей и мультиполей, которые удовлетворяют системе уравнений Максвелла в областях $D_{e,i}$ и условиям излучения на бесконечности для рассеянного поля $\{\mathbf{E}_e^s, \mathbf{H}_e^s\}$. Тогда решение граничной задачи рассеяния (1) сводится к определению неизвестных амплитуд дискретных источников (ДИ) из условий сопряжения для полей на поверхности частицы

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e^s) &= \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}^0, \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e^s) &= \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}^0 \quad \text{на } \partial D_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, задача дифракции (1) сведена к решению задачи аппроксимации поля плоской волны

$\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$. Решение этой задачи может быть осуществлено, следуя общей схеме МДИ [4]. Напомним основные моменты. Поскольку поверхность частицы является осесимметричной, то перейдем от задачи аппроксимации для полей на поверхности (2) к последовательному решению задач сопряжения на образующей поверхности \mathfrak{S}_i вращения ∂D_i для гармоник Фурье полей по азимутальной переменной [4]. Специальный выбор в качестве источников мультиполей, локализованных на оси симметрии OZ или в примыкающей к оси части комплексной плоскости, позволяет использовать векторные потенциалы следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}^{1,e,i} &= \{Y_m^{e,i}(\xi, z_n) \cos(m+1)\phi; \\ &\quad -Y_m^{e,i}(\xi, z_n) \sin(m+1)\phi; 0\}, \\ \mathbf{A}_{mn}^{2,e,i} &= \{Y_m^{e,i}(\xi, z_n) \sin(m+1)\phi; \\ &\quad Y_m^{e,i}(\xi, z_n) \cos(m+1)\phi; 0\}, \\ \mathbf{A}_{0n}^{3,e,i} &= \{0; 0; Y_0^{e,i}(\xi, z_n)\}, \\ Y_m^e(\xi, z_n) &= h_m^{(2)}(k_e R_{\xi z_n}) (k_e \rho / R_{\xi z_n})^m, \\ Y_m^i(\xi, z_n) &= j_m(k_i R_{\xi z_n}) (k_i \rho / R_{\xi z_n})^m, \end{aligned}$$

где $h_m^{(2)}(\cdot)$, $j_m(\cdot)$ — сферические функции Ханкеля и Бесселя соответственно, $R_{\xi z_n}^2 = \rho^2 + (z - z_n)^2$, координаты мультиполей $\{z_n^{e,i}\} \in OZ$ в D_i . Построим приближенное решение, учитывающее не только осевую симметрию рассеивателя, но и поляризацию падающей плоской волны. Рассмотрим случай P -поляризации, когда поле плоской волны может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= (\mathbf{e}_x \cos \theta_0 - \mathbf{e}_z \sin \theta_0) \gamma, \\ \mathbf{H}^0 &= -\mathbf{e}_y \gamma, \\ \gamma &= \exp\{-ik_e(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k_e = k\sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$. Тогда для P -поляризованного излучения приближенное решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\zeta^N \\ \mathbf{H}_\zeta^N \end{pmatrix} &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\zeta^m} \left\{ p_{mn}^\zeta \begin{pmatrix} \frac{i}{k\varepsilon_\zeta \mu_\zeta} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \\ -\frac{1}{\mu_\zeta} \operatorname{rot} \end{pmatrix} \mathbf{A}_{mn}^{1,\zeta} + \right. \\ &\quad \left. + q_{mn}^\zeta \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_\zeta} \operatorname{rot} \\ \frac{i}{k\varepsilon_\zeta \mu_\zeta} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \end{pmatrix} \mathbf{A}_{mn}^{2,\zeta} \right\} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_\zeta^0} r_n^\zeta \begin{pmatrix} \frac{i}{k\varepsilon_\zeta \mu_\zeta} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \\ -\frac{1}{\mu_\zeta} \operatorname{rot} \end{pmatrix} \mathbf{A}_{0n}^{3,\zeta}. \end{aligned}$$

Полнота и замкнутость полей совокупной системы мультиполей в силу теоремы корректности [4] обеспечивает сходимость приближенного решения к точному решению задачи (1).

Вычислительный алгоритм

Поскольку схема вычислительного алгоритма была подробно рассмотрена в работе [5], мы остановимся лишь на описании отличительных особенностей, возникающих в задачах рассеяния на экстремальных частицах. Как отмечалось выше, построенное на основе МДИ приближенное решение удовлетворяет всем условиям граничной задачи (1), за исключением условий сопряжения (2). Поэтому определение неизвестных амплитуд дискретных источников $\{p_{mn}^{e,i}, q_{mn}^{e,i}, r_n^{e,i}\}$ проводится из требования приближенного удовлетворения условий сопряжения (2) в соответствующей функциональной норме [2]. Разлагая внешнее возбуждение (3) в ряд Фурье по азимутальной переменной, задача поверхностной аппроксимации сводится к последовательному решению одномерных аппроксимационных задач на образующей частицы \mathfrak{S}_i , которые решаются с применением обобщенного метода коллокаций. Отличия рассматриваемого алгоритма от предыдущей реализации сводятся к следующим основным моментам:

1. Число ДИ для представления полей вне области D_e и внутри частицы D_i выбирается различным и пропорциональным индексу рефракции $\sqrt{\varepsilon\mu}$. Чем больше значение индекса, тем больше количество источников.

2. Число ДИ зависит от номера Фурье гармоники N_ζ^m , $\zeta = e, i$. Чем выше номер гармоники m , тем меньше требуется количество мультиполей N_ζ^m для обеспечения требуемой точности. При этом число точек коллокации остается постоянным для всех гармоник.

Описанная выше модификация схемы МДИ дает возможность существенно расширить его возможности, в частности анализировать сильно вытянутые частицы и рассеиватели с высоким индексом рефракции. Как и раньше [4], расчет характеристик рассеяния осуществляется одновременно для всех углов падения θ_0 и двух базовых поляризаций (P и S). Модифицированная схема позволяет также осуществлять апостериорную оценку погрешности полученного приближенного решения посредством вычисления невязки удовлетворения условий сопряжения (2) на поверхности частицы в среднеквадратичной норме. Что дает возможность реально контролировать сходимость приближенного решения к точному.

Для вычисления интенсивности рассеянного поля на бесконечности необходимо иметь диаграмму рассеяния [4]. Ее F_θ и F_ϕ компоненты для случая P -поляризации на единичной сфере имеют следующий вид

$$F_\theta^P(\theta, \phi) = ik \sum_{m=0}^M \cos(m+1)\phi (ik \sin \theta)^m \times \\ \times \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{nm}^e \cos \theta + q_{nm}^e\} G_n - ik \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e G_n,$$

$$F_\phi^P(\theta, \phi) = -ik \sum_{m=0}^M \sin(m+1)\phi (ik \sin \theta)^m \times \\ \times \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{nm}^e + q_{nm}^e \cos \theta\} G_n, \\ G_n = \exp\{-ik_e z_n \cos \theta\}.$$

Основной характеристикой рассеяния в нашем исследовании является интенсивность рассеяния для случая P - и S -поляризации, которая выражается через компоненты диаграммы как

$$I^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi) = \left| F_\theta^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi) \right|^2 + \left| F_\phi^{P,S}(\theta_0, \theta, \phi) \right|^2. \quad (4)$$

Численные результаты

Для иллюстрации возможностей модифицированной схемы рассматривалась длина волны излучения $\lambda = 0.488$ мкм. В качестве материалов использовались SiO_2 (индекс рефракции $n_i = 1.46$), SiN ($n_i = 2.0 - 0.0013i$) и Si ($n_i = 4.37 - 0.08i$). В качестве моделей волокна рассматривались две модели, наиболее часто используемые на практике: цилиндр со сферическими основаниями и вытянутый сфероид. Причем сопоставлялись модели, имеющие одинаковую толщину $2a = 200$ нм и одинаковое соотношение полуосей $\delta = b/a$. Во всех проведенных расчетах погрешность результатов не превышала 1.5% в равномерной норме, что контролировалось сходимостью по невязке и диаграмме (4).

На рис. 1 показаны зависимости интенсивности рассеяния от угла θ для случая P - и S -поляризации плоской волны и углов $\theta_0 = 30^\circ, 90^\circ$ для вытянутого SiN цилиндра с соотношением осей $\delta = 30$. Из графика видно, что при угле падения $\theta_0 = 30^\circ$ максимум излучения расположен в теневой области $\theta = -150^\circ$. Кроме того, в направлении $\theta = 150^\circ$ имеется максимум, соответствующий углу зеркального отражения по отношению к оси симметрии частицы. Аналогичная картина наблюдается и при угле падения волны $\theta_0 = 90^\circ$.

На рис. 2 приведены зависимости интенсивности рассеяния от угла θ для SiN цилиндров с различным соотношением осей $\delta = 10, 50$, угол падения волны $\theta_0 = 60^\circ$. Видно, что при увеличении вытянутости цилиндра растут как амплитуды максимумов, так и число осцилляций.

На рис. 3 показаны зависимости интенсивности рассеяния от угла θ для цилиндров вытянутости $\delta = 30$ и различных материалов $\text{SiO}_2, \text{SiN}, \text{Si}$ при угле падения $\theta_0 = 60^\circ$. Из рисунка видно, что изменение материала частицы ведет лишь к изменению величины максимумов и уровней боковых лепестков, а число осцилляций сохраняется.

На рис. 4 приведены зависимости интенсивности рассеяния от угла θ для цилиндрической модели

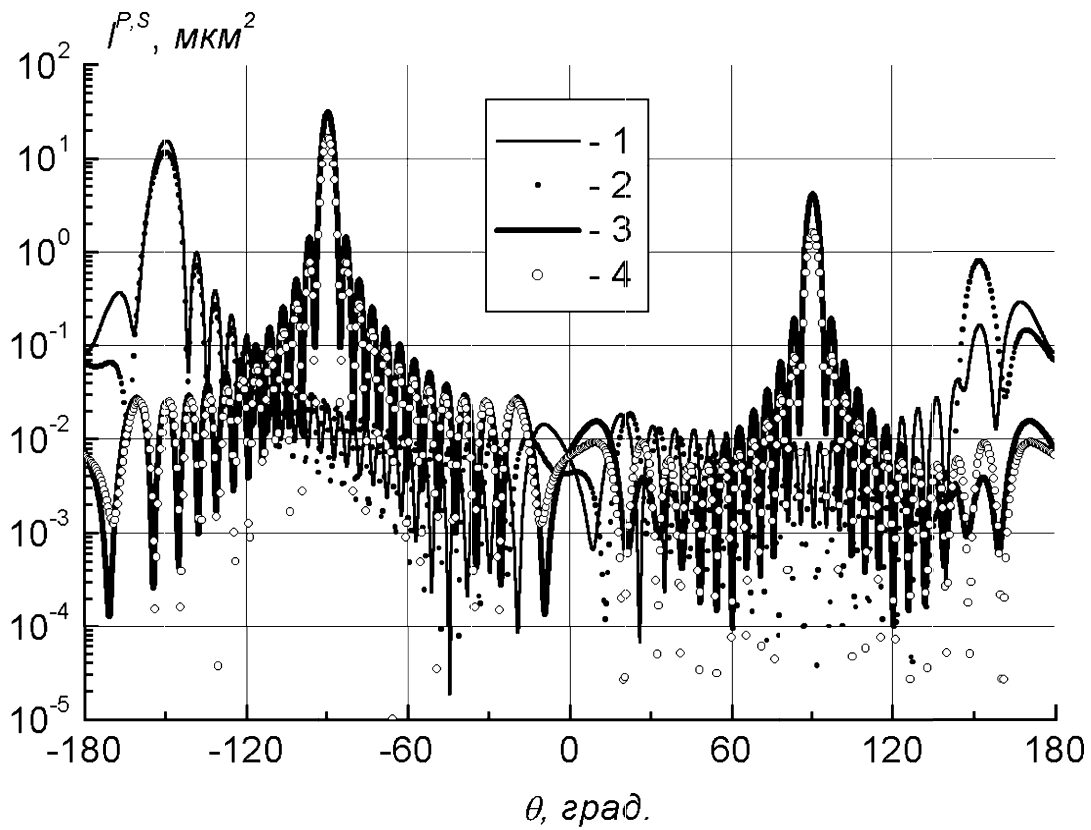


Рис. 1. Зависимость интенсивности от угла рассеяния в плоскости падения волны при дифракции на SiN цилиндре $\delta = 30$. Углу падения $\theta_0 = 30^\circ$ соответствует кривая 1, для P -поляризации; кривая 2 для S -поляризации; углу падения $\theta_0 = 90^\circ$ соответствует кривая 3, для P -поляризации; кривая 4 для S -поляризации

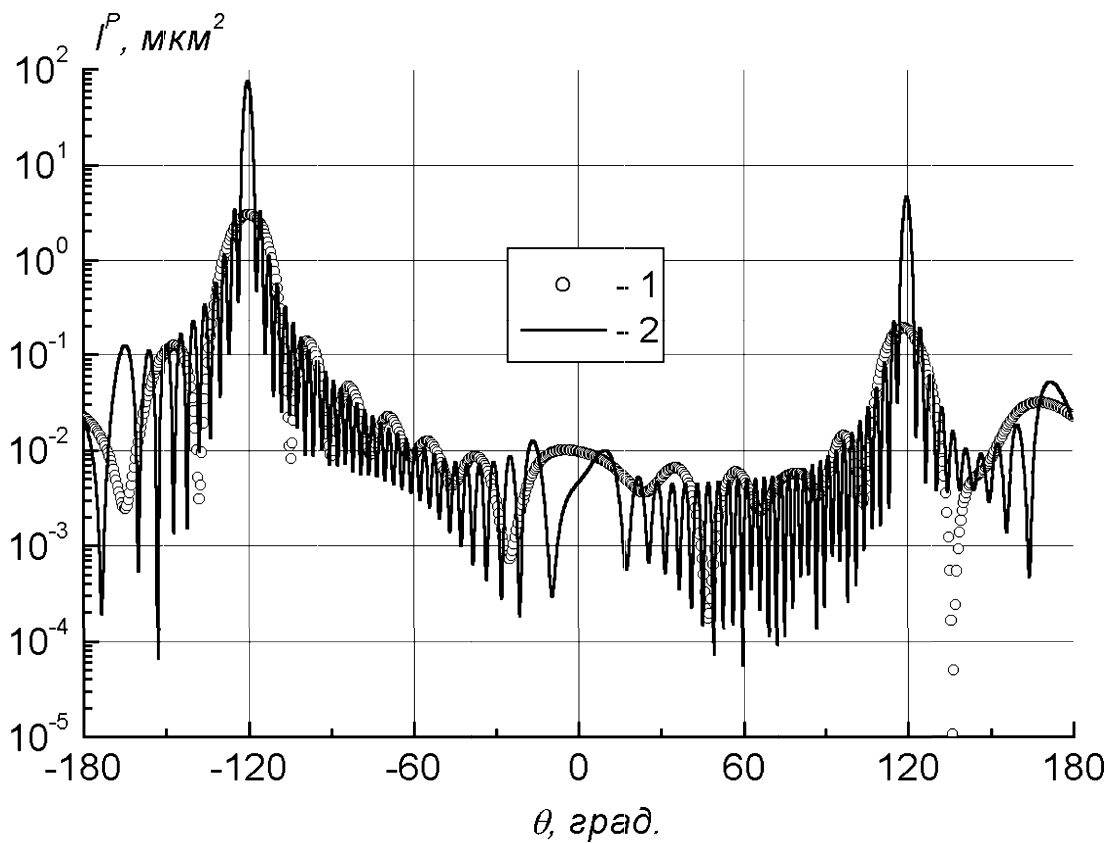


Рис. 2. Зависимость интенсивности рассеяния при дифракции на SiN цилиндре $\theta_0 = 60^\circ$, P -поляризация. (1) $\delta = 10$; (2) $\delta = 50$

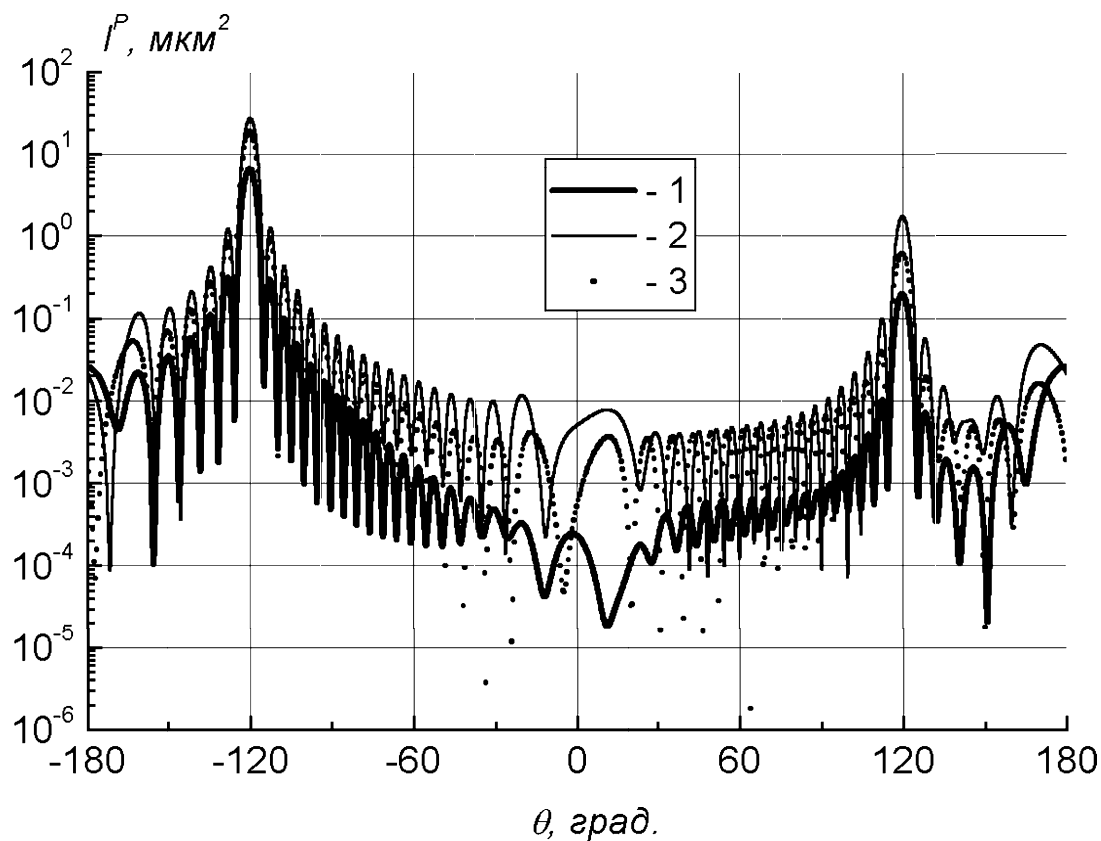


Рис. 3. Зависимость интенсивности рассеяния при дифракции на цилиндре $\delta = 30$, $\theta_0 = 60^\circ$, P -поляризация. (1) SiO_2 ; (2) SiN ; (3) Si

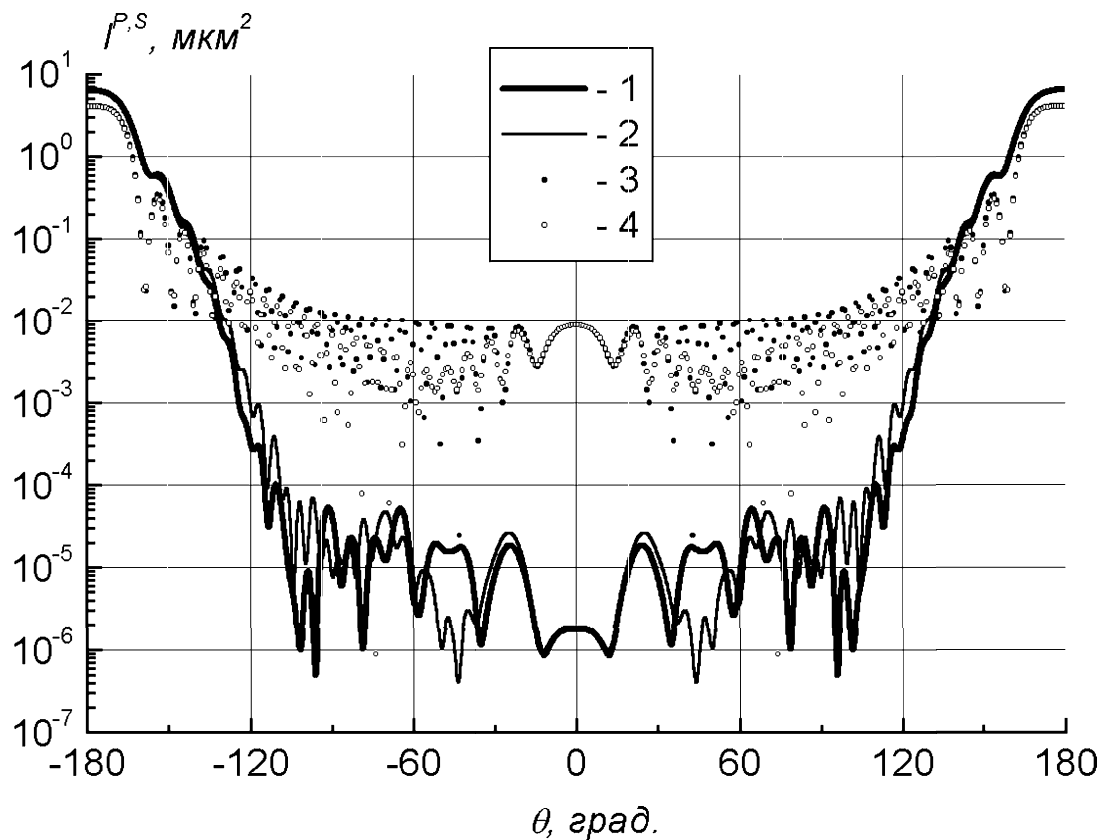


Рис. 4. Зависимость интенсивности рассеяния при дифракции на SiN частице $\delta = 30$, $\theta_0 = 0^\circ$. (1) сферид, P -поляризация; (2) сферид, S -поляризация; (3) цилиндр, P -поляризация; (4) цилиндр, S -поляризация

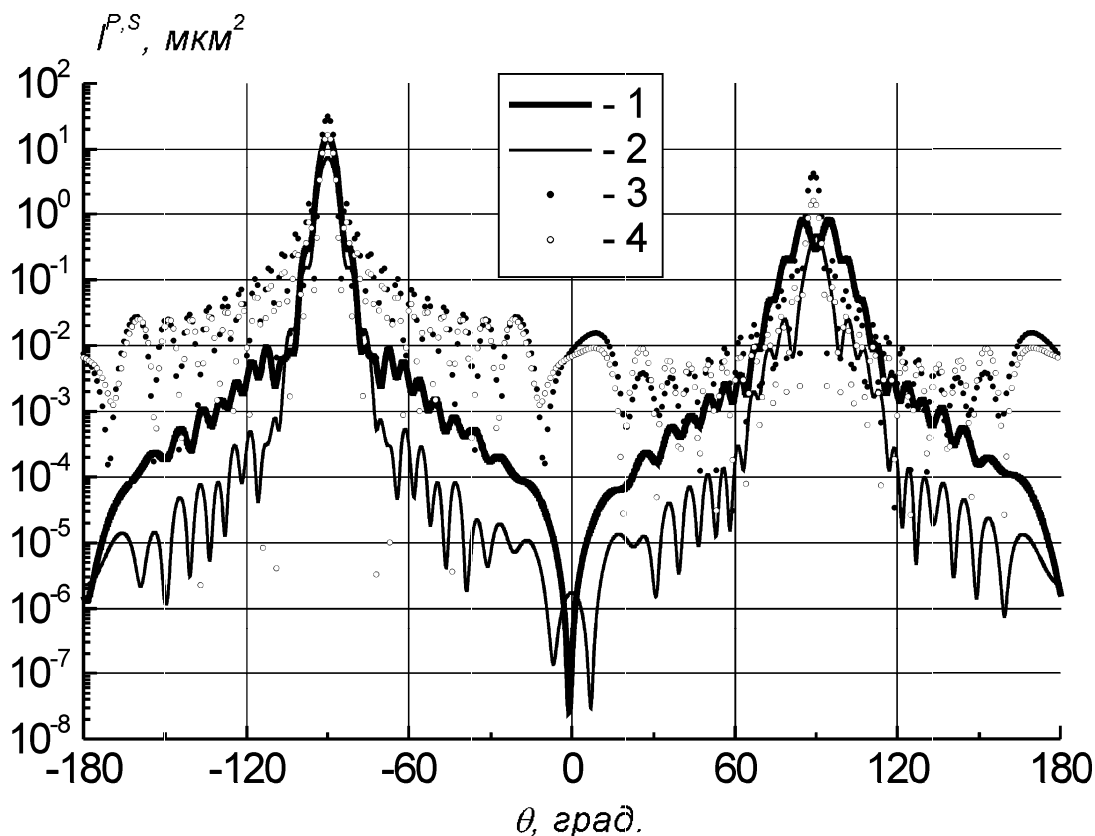


Рис. 5. Зависимость интенсивности рассеяния при дифракции на SiN частице $\delta = 30$, $\theta_0 = 90^\circ$. (1) сфероид, P -поляризация; (2) сфероид, S -поляризация; (3) цилиндр, P -поляризация; (4) цилиндр, S -поляризация

с вытянутым сфероидом для SiN. При этом вытянутость составила $\delta = 30$, а угол падения $\theta_0 = 0^\circ$. Аналогичные результаты показаны на рис. 5 для угла падения волны $\theta_0 = 90^\circ$. Полученные результаты демонстрируют существенное различие в характеристиках рассеяния цилиндра и сфероида. Прежде всего это различие в амплитудах боковых лепестков, которые в случае сфероида на несколько порядков меньше, чем в случае цилиндра.

Точность результатов численных расчетов и их гибкость по отношению к изменению как геометрических, так и физических характеристик частиц позволяет сделать вывод о возможности их использования совместно с оптическими средствами для интерпретации результатов наблюдений и выявления наличия частиц с экстремальными параметрами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 00-01-00111 и № 02-02-04011) и программы «Университеты России».

Литература

1. Mishchenko M.I., Travis L.D., Mackowski D.W. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1996. **55**, No. 1. P. 35.
2. Varadan V.V., Varadan V.K. Acoustic, Electromagnetic and Elastic Waves Scattering — Focus on the T -matrix Approach. N. Y., 1980.
3. Еремин Ю.А., Сवेशников А.Г. // ЖВМиМФ. 2000. **40**, № 12. С. 1842.
4. Еремин Ю.А., Сवेशников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М., 1992.
5. Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Сवेशников А.Г. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 2. С. 24 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 2. P. 29).

Поступила в редакцию
30.09.02