генерации фотонов в угол $\vartheta < 5°$ эффективность ИЖИ с рециркуляцией превышает эффективность традиционного источника также примерно в 20 раз (рис. 4). При этом из рис. 4 и 5 видно, что спектр рециркуляционного ИЖИ обогащается как за счет большего количества «мягких» фотонов, так и за счет «наполнения» спектра более жесткими гамма-квантами.

Таким образом, моделирование подтвердило высокую эффективность ИЖИ с рециркуляцией и смещением циркулирующих частиц по отношению к традиционным источникам. Это открывает широкие возможности для последующих разработок и исследований.

Литература

1. *Ковалев В.П.* Вторичные излучения ускорителей электронов. М., 1979.
2. *Berger M.J., Seltzer S.M.* // Phys. Rev. 1970. **C2**. P. 621.
3. *Гришин В.К., Ермаков А.Н., Ишханов Б.С.* и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. №5. С. 74 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 5. P. 90).
4. *Гришин В.К., Ишханов Б.С., Шведунов В.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №1. С. 83 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 1. P. 69).
5. *Bogdanovich B., Kudinov V., Nesterovich A.* et. al. // Proceeding of «PAC'97» (Vancouver, 1997). 1998. IEEE. P. 276.
6. *Kaplin V.V., Lombardo L.W., Mihalchuk A.A.* et al. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1998. **B145**. P. 244.
7. *Grishin V., Ishkhanov B., Likhachev S.* et al. // Proc. of Int. Conf. PAC97. APS-IEEE. 1997. P. 3866.
8. *Гришин В.К., Ишханов Б.С., Лихачев С.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №3. С. 62. (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 3. P. 76).
9. *Гришин В.К., Лихачев С.П., Насонов Н.Н.* // Изв. РАН. Физика. 2000. **64**, №11. С. 2147.
10. *Brun R., Bruyant, Maire M.* et al. // GEANT3 (User manual). GERN. Geneva, Switzerland, 1990.

Поступила в редакцию
04.10.02

РАДИОФИЗИКА

УДК 535.13:535.36

СТРУКТУРА СПЕКТРА ПОГЛОЩЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА

Г. В. Белокопытов, А. В. Журавлев

(*кафедра физики колебаний*)

E-mail: gvb@phys.msu.su

Описаны алгоритм и результаты численного расчета сечения поглощения сферической частицы с малыми потерями в широком диапазоне значений параметра дифракции. Показано, что резонансные пики поглощения группируются в серии, в пределах которых резонансные амплитуды зависят от номера моды подобным образом.

Теория рассеяния и поглощения электромагнитных волн сферическими частицами (теория Ми) имеет вековую историю и многочисленные приложения [1–3]. В ее рамках известно, что сечение рассеяния электромагнитных волн немонотонно зависит от частоты, или, что эквивалентно, от параметра дифракции q ($q = 2\pi a/\lambda_0 = \omega a/c$, где a — радиус частицы, λ_0 — длина волны в вакууме, c — скорость света). Эта немонотонность носит двоякий характер, наряду с плавными осцилляциями, затухающими с ростом q, наблюдаются острые, на первый взгляд нерегулярно расположенные пички («рябь»).

Причиной появления «ряби» является резонансное возбуждение высокодобротных мод («мод шепчущей галереи»). Характеристики резонансов, их влияние на рассеяние света исследовались численно в работах [4–7]. Кроме того, в статьях [8, 9] предложены аналитические формулы для нахождения амплитуд и добротностей резонансных пиков. Однако упомянутые работы не дают адекватного представления о виде зависимостей сечения рассеяния $C_{\text{sca}}(q)$ и сечения поглощения $C_{\text{abs}}(q)$, поскольку численное моделирование в [4–7] было выполнено в ограниченном интервале значений q и с пренебрежением поглощения в частице. Что касается формул, полученных в [8, 9], то их использование для качественных выводов затруднительно, а применение для вычислений требует предварительного расчета собственных частот резонансных мод, причем для мод с высокими номерами точность вычислений должна быть чрезвычайно высокой.

В настоящей работе исследуются зависимость эффективности поглощения $\bar{C}_{\text{abs}}$ (сечения C_{abs}, нормированного на площадь сечения частицы πa^2) от параметра дифракции q. Для вычисления и наблюдения резонансов более удобно рассматривать зависимости $\bar{C}_{\rm abs}(q)$, а не зависимости эффективности поглощения и экстинкции. К тому же именно величина $C_{\rm abs}$ пропорциональна электромагнитной энергии, запасенной внутри резонатора, а положение и высота максимумов $\bar{C}_{\rm abs}(q)$ характеризуют оптимальные условия для наблюдения оптической левитации и нелинейно-оптических эффектов. Нами проведено численное моделирование зависимостей $\bar{C}_{\rm abs}(q)$ для частиц с комплексным показателем преломления $m_1 = 1.323 + i\alpha$, где α — показатель затухания, при этом показатель преломления окружающей среды $m_2 = 1$. Это приближенно соответствует случаю капель воды, причем величины $q < 380$ соответствуют диаметрам капли до 120 длин световых волн.

Расчет эффективности поглощения $\bar{C}_{\rm abs}$ производился по формулам теории Ми [2]:

$$\bar{C}_{\rm abs} = \bar{C}_{ext} - \bar{C}_{\rm sca}, \tag{1}$$

где

$$\bar{C}_{\rm sca} = \frac{2}{(m_2 q)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\}, \tag{2}$$

$$\bar{C}_{ext} = \frac{2}{(m_2 q)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \,\mathrm{Re}(a_n + b_n). \tag{3}$$

где a_n, b_n — парциальные амплитуды волн, рассеянных диэлектрическим шаром.

Эффективность поглощения можно выразить также через парциальные амплитуды вынужденных колебаний c_n и d_n:

$$\bar{C}_{\rm abs} = \frac{2}{(m_2 q^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(u_n |c_n|^2 + v_n |d_n|^2), \tag{4}$$

где

$$u_n = \frac{1}{|m_1|^2} \mathrm{Im} \left\{ \left[\psi_n(q)\psi_n'(m_1 q) - m_1 \psi_n(m_1 q)\psi_n'(q) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[\chi_n(q)\psi_n'(m_1 q) - m_1 \psi_n(m_1 q)\chi_n'(q) \right]^* \right\},$$
$$v_n = \frac{1}{|m_1|^2} \mathrm{Im} \left\{ \left[m_1 \psi_n(q)\psi_n'(m_1 q) - \psi_n(m_1 q)\psi_n'(q) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[m_1 \chi_n(q)\psi_n'(m_1 q) - \psi_n(m_1 q)\chi_n'(q) \right]^* \right\},$$

$\psi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ — функции Риккати–Бесселя 1-го и 2-го рода [1–3]. Формула (4) эквивалентна (1)–(3), ее достоинством является то, что она в явном виде показывает рост сечения поглощения на частотах, где имеются максимумы парциальных амплитуд вынужденных колебаний.

Алгоритм

Расчет зависимостей $C_{\rm abs}(q)$ производился по формулам (1)–(3). Парциальные амплитуды a_n, b_n, c_n и d_n находились по известным формулам теории Ми [1–3]. Вычисление функций Риккати–Бесселя производилось методом нисходящей рекурсии по рекуррентным формулам [10].

Основная трудность при вычислении по формулам (1)–(3) или (4) состоит в достижении сочетания высокой точности и приемлемой скорости расчетов. Малая ширина резонансов по сравнению с расстоянием между ними требует малого шага и большого количества точек по q. Если шаг по q выбран недостаточно мелким, то могут быть упущены особенности, связанные с возбуждением наиболее добротных «мод шепчущей галереи» [4]. Такие пропуски становятся почти неизбежными при расчете панорамных зависимостей $\bar{C}_{\rm abs}(q)$. Получаемые при этом графики (см., напр., работу [2]) указывают на существование резонансных всплесков, однако не способны дать правильное представление об их амплитудах, добротностях и частоте появления. Отмеченные недостатки отсутствуют в применяемом в настоящей работе подходе с использованием неравномерного шага.

В ходе вычислений создавались массивы величин, характеризующих моды. В них входили резонансные значения параметра дифракции $q_{\rm res}(n,l)$, добротности $Q(n,l)$ и резонансные значения парциальных амплитуд внутри резонатора $|c_{\rm res}(n,l)|$, $|d_{\rm res}(n,l)|$. Индекс n в теории Ми (номер моды) равен числу узлов поля по угловой координате θ. Индекс l (порядок моды) определяется как номер резонансного максимума на зависимости $|c_n(q)|$ (рис. 1), зависимости для $|d_n(q)|$ аналогичны. Вычислив ряд значений c_n (или d_n) в окрестности данного резонанса, мы аппроксимировали зависимости от q резонансными кривыми общепринятого вида:

$$|c_n(q)|^{-2} = |c_{\rm res}(n,l)|^2 \left[1 + Q^2(n,l)(1 - q_{\rm res}^2(n,l)/q^2) \right]$$

(то же справедливо и для $d_n(q)$) и находили совокупность значений $|c_{\rm res}(n,l)|$, $Q(n,l)$ и $q_{\rm res}(n,l)$ методом наименьших квадратов. Таким образом, все три интересующие характеристики можно вычислить небольшим количеством итераций.

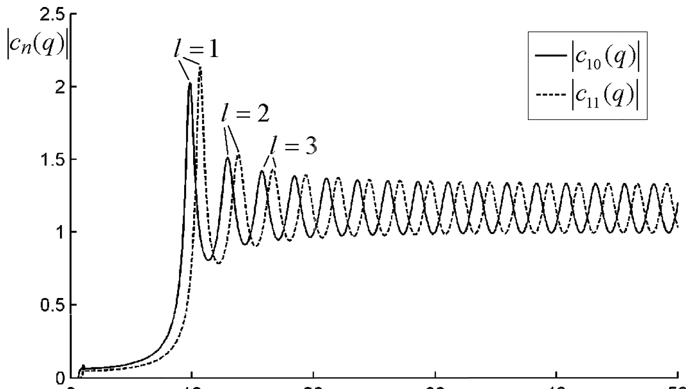


Рис. 1. Парциальные амплитуды десятой и одиннадцатой поперечно-магнитных мод. Обозначены порядки первых трех резонансов. $m_1 = 1.323 + 9.74 \cdot 10^{-6}$, $m_2 = 1$

Расчет $c_n(q)$ и $d_n(q)$ для первых двух мод ($n = 1, 2$) производился с постоянным шагом, выбираемым так, чтобы в окрестности каждого резонанса имелось не менее десяти точек. Для третьей и последующих мод на основе информации о предыдущих двух модах делалось предсказание резонансной частоты $\tilde{q}_{\rm res}(n,l)$ и добротности $\tilde{Q}(n,l)$. Причем учитывалось то обстоятельство, что зависимость собственных частот $q_{\rm res}$ от номера n при $l=\rm const$ почти линейна, а добротность монотонно растет с ростом номера n. В окрестности предсказанной точки $q=\tilde{q}_{\rm res}(n,l)$ с приемлемым шагом (не менее десятка точек на максимум), определяемым добротностью и резонансной частотой ($dq=\Delta q/10=\tilde{q}_{\rm res}/[\tilde{Q}\times\times 10]$), программа, как правило, находила резонанс. В случае когда первоначальная оценка резонансной частоты оказывалась неточной, вычислялись дополнительные точки, соответствующие изменению q в сторону резонанса. Полученная подобным образом выборка точек обрабатывалась методом наименьших квадратов и динамически пополняла базу данных характеристик резонансов.

Построение зависимости $\bar{C}_{\rm abs}(q)$ проводилось следующим образом. Вначале весь интервал q проходился с постоянным шагом, который можно варьировать в зависимости от требуемой точности, например для эффективности поглощения, представленной на рис. 2, *б*, был взят шаг ≈ 0.4. К результатам, вычисленным при постоянном шаге, добавлялись отсчеты, соответствующие окрестностям резонансов (n,l), обычно по 10 точек на резонанс. В расчет зависимости рис. 2, *б* принималось около 2000 резонансов, имевших достаточно большую амплитуду. Таким образом, на интервале q от 0 до 380 располагалось примерно 20000 точек неравномерной сетки. Если бы расчет велся с постоянным шагом, то при $Q\sim 10^5$ следовало бы брать шаг $\Delta q\sim 10^{-4}$, и тогда потребовалось бы на интервале вычислений брать гораздо большее число точек, около $4\cdot 10^6$.

Таким образом, описанный алгоритм позволяет, не упуская участков резонансного поведения, существенно сэкономить время вычислений.

Результаты

Типичные результаты расчетов эффективности поглощения представлены на рис. 2–4. Зависимость $\bar{C}_{\rm abs}(q)$ (рис. 2, *б*) имеет две составляющие: «пьедестал», монотонно возрастающий с ростом параметра дифракции, и последовательность серий узких резонансных пиков.

В области пьедестала кривая эффективности поглощения формируется за счет суммирования вкладов от резонансов $E_{n,1,l}$, $H_{n,1,l}$ с $q>n$. Эти резонансы соответствуют волнам, для которых условия полного внутреннего отражения не выполняются. Как видно на рис. 1, добротности этих резонансов низки, а осцилляции соседних мод при суммировании компенсируют друг друга.

Серии резонансных пиков различаются радиальным индексом l. При увеличении значений q наблюдаются резонансы с бо́льшими номерами l. На рис. 2, *б* можно увидеть лишь общий ход огибающих резонансных мод, соответствующих различным

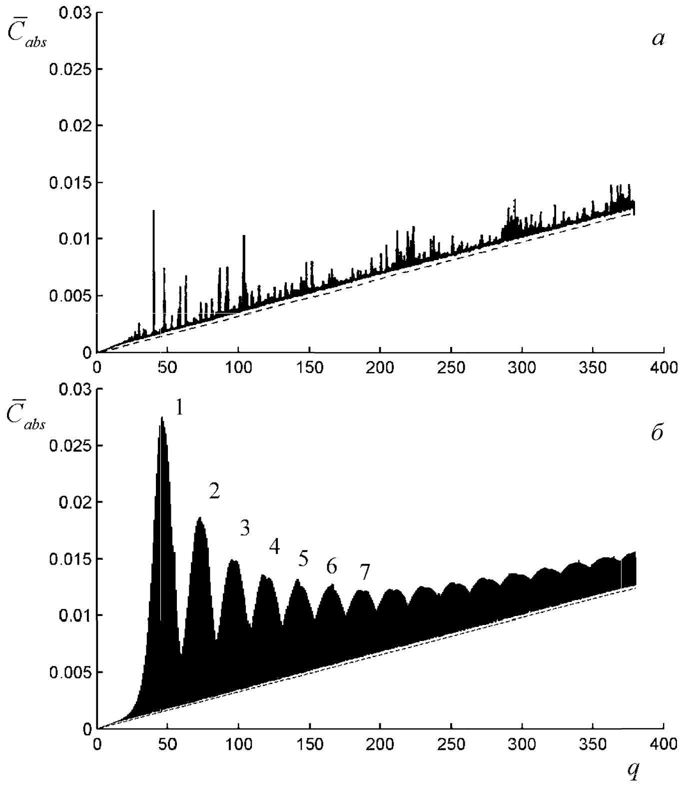


Рис. 2. Расчетная эффективность поглощения водяной капли $\bar{C}_{\rm abs}$; (*а*) результаты работы [2], (*б*) — настоящая работа, цифры у максимумов указывают порядок резонансных мод l. Пунктирная линия — приближение геометрической оптики; $m_1=1.323+9.74\cdot 10^{-6}i$, $m_2=1$

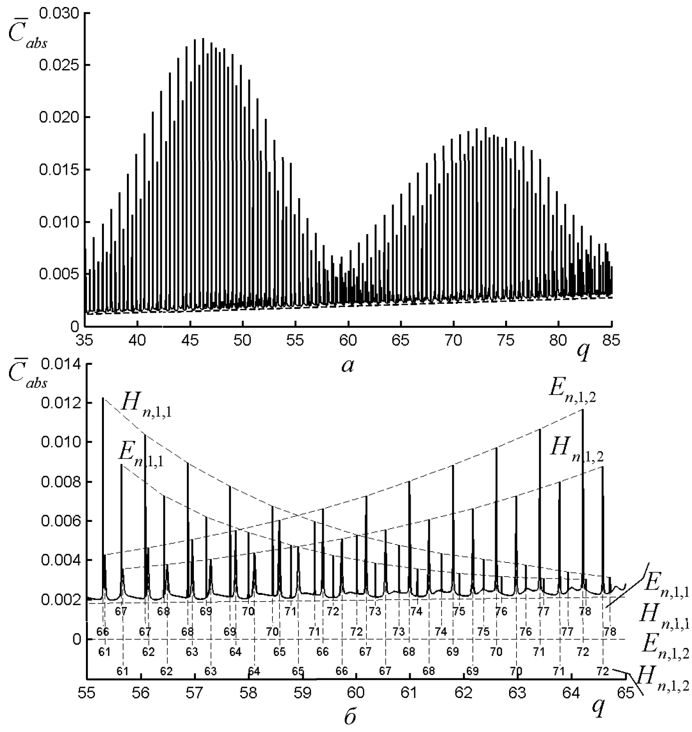
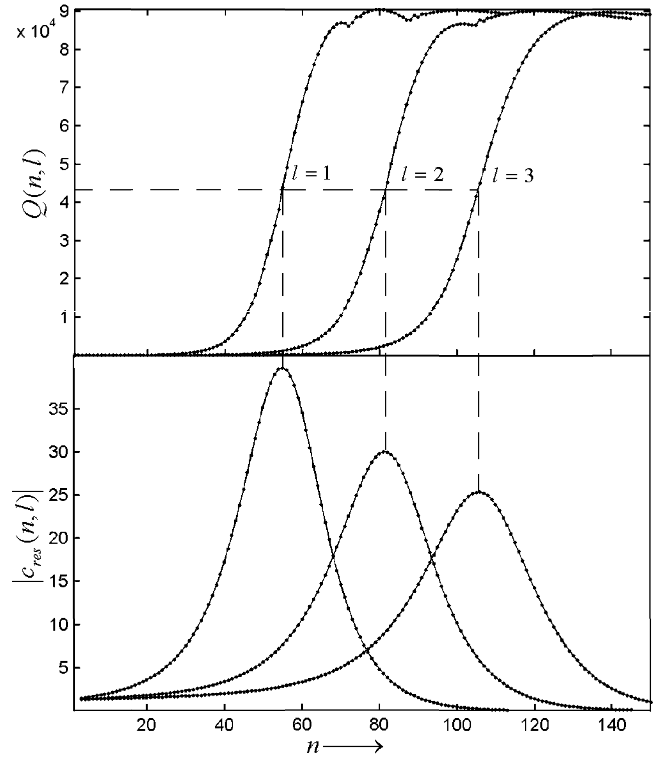


Рис. 3. Эффективность поглощения водяной капли $\bar{C}_{\rm abs}$. Внизу указаны номера мод n, соответствующие резонансам указанных серий; $m_1=1.323+9.74\cdot 10^{-6}i$, $m_2=1$



а

б

Рис. 4. Добротность $Q(n,l)$ поперечно-магнитных мод первых трех порядков (*а*), парциальные амплитуды $|c_{\rm res}(n,l)|^2$ этих мод на резонансной частоте (*б*). $m_1 = 1.323 + 9.74 \times \times 10^{-6}i$, $m_2 = 1$

порядкам l. При увеличении масштаба по q становятся различимыми более тонкие детали. Так, на рис. 3, *а* представлен ход зависимости $\bar{C}_{\rm abs}(q)$, в интервале q, где резонансный вклад формируют серии резонансов первых двух порядков ($l = 1$ и $l = 2$). Для всех порядков l частотные интервалы, соответствующие областям наблюдения мод $E_{n,1,l}$ (поперечно-магнитных), и $H_{n,1,l}$ (поперечно-электрических) частично перекрываются, причем огибающая семейства $E_{n,1,l}$ достигает максимума при меньших q. На рис. 3, *б* представлен фрагмент зависимости сечения поглощения в интервале q, где имеет место перекрытие серий $l = 1$ и $l = 2$. В этом интервале резонансные амплитуды первых двух серий ($E_{n,1,1}$ и $H_{n,1,1}$) убывают, а вторых ($E_{n,1,2}$ и $H_{n,1,2}$) — возрастают. В пределах одного семейства линии различаются номером резонанса (индекс n указан внизу рисунка) и при больших n образуют практически эквидистантную гребенку.

Для мод данной серии добротности резонансов монотонно возрастают с ростом номера n и асимптотически стремятся к уровню $Q_{\rm max} \approx m'/2m'' \sim \alpha^{-1}$ (см. рис. 4, *а*). Зависимость же амплитуды резонанса от номера моды немонотонна (см. рис. 4, *б*). При последовательном увеличении n, высота резонанса сначала увеличивается вместе с ростом добротности. Максимальное значение парциальной амплитуды достигается у той моды, для которой потери на излучение равны потерям на поглощение. При дальнейшем увеличении n высота резонансных пиков уменьшается из-за ослабления связи резонатора с возбуждающей электромагнитной волной. Вклад мод с достаточно большими номерами n в общую картину рассеяния и поглощения становится пренебрежимо малым. Как следствие, наблюдаемая в резонаторе с потерями спектральная плотность мод при больших q оказывается существенно меньшей, чем дают расчеты, в которых потери на поглощение пренебрежимо малы [12]. Благодаря эффекту убывания амплитуд слабо связанных мод с ростом параметра дифракции, моды различных порядков полностью не перекрываются и мы можем различать огибающие на графике эффективности поглощения (рис. 2, *б*, 3, *а*).

Высота резонансных пиков уменьшалась при росте коэффициента затухания α. При этом условие оптимальной связи $Q_{n,l} = \frac{1}{2}Q_{\rm max}$ достигалось при меньших значениях номера моды n. Соответственно при росте α имел место сдвиг огибающих серий резонансов влево по оси частот (параметра дифракции q).

Заключение

Представленные результаты иллюстрируют качественные закономерности поглощения, которые являются общими для сферических резонаторов с невысоким показателем преломления при различных уровнях потерь. Как видно, спектр поглощения состоит из нерезонансного «пьедестала», и резонансных пиков, соответствующих возбуждению высокодобротных «мод шепчущей галереи». При этом резонансные пики группируются в серии, соответствующие модам различных порядков, а зависимости резонансных амплитуд от номера моды и для различный серий качественно подобны.

Описанные выше закономерности группировки резонансов в серии и немонотонность зависимости резонансных амплитуд в пределах серии становятся очевидными при рассмотрении спектра поглощения в широком интервале параметров дифракции и при учете конечного поглощения в диэлектрике. Сделанное при этом усовершенствование методики расчета спектров будет также полезным при решении смежных задач теории Ми.

Литература

1. *Kerker M.* The scattering of light and other electromagnetic radiation. N. Y., 1969.
2. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., 1986.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М., 1970.
4. *Chylek P., Kiehl J.T., Ko M.K.W.* // Appl. Opt. 1978. **17**, No. 19. P. 3019.
5. *Probert-Zones J.R.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1984. **1**, No. 8. P. 822.
6. *Conwell P.R., Barber P.W., Rushforth G.K.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1984. **1**, No. 1. P. 62.
7. *Bott A., Zdunkowski W.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1987. **4**, No. 8. P. 1361.

8. *Lam C.C., Leung P.T., Young K.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1992. **9**, No. 9. P. 1585.
9. *Johnson B.R.* // J. Opt. Soc. Am. 1993. **10**, No. 2. P. 343.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., 1979.
11. *Gastine M., Courtois L., Dormann J.L.* // IEEE Trans. on microwave theory and techniques. 1968. **MTT-15**, No. 12. P. 694.
12. *Hill S.C., Benner R.E.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. **3**, No. 11. P. 1509.

Поступила в редакцию
06.11.02