КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958; 621.372.8

О ЛОВУШЕЧНЫХ МОДАХ НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Обсуждены причины затруднений при доказательстве существования вложенных ловушечных мод волноводов.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

в волноводе Ω, представляющем собой регулярный волновод G, к которому подключен резонатор (рис. 1). Исследованию этой спектральной задачи посвящены многочисленные работы [1–3], однако остается неясным, существуют ли у нее вложенные ловушечные моды.

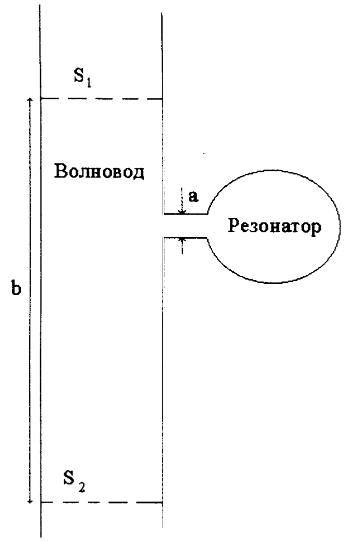

Рис. 1. Волновод с резонатором

При $a = 0$ рассматриваемая система распадается на две области: регулярный волновод и резонатор и, значит, имеет бесконечно много ловушечных мод. Поскольку волновод — область неограниченная, нельзя применить регулярную теорию возмущений Реллиха–Като, а следовательно, и утверждать, что в окрестности собственных значений резонатора имеются собственные значения задачи (1) при малых $a \neq 0$.

Поэтому выделим в волноводе Ω конечную область Ω', проведя сечения S_1 и S_2 на расстоянии b друг от друга (см. рис. 1). Обозначим как G' ту часть Ω', которая лежит в G. Поскольку Ω конечна, при малых a задача

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, (x, y) \in \Omega', \\ u|_{\partial\Omega'} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет вблизи первого собственного значения резонатора собственное значение λ_1, зависящее от a и b. Если это собственное значение является наименьшим собственным значением задачи (2), то соответствующая собственная функция $u_1(x, y; a, b)$ знакоопределена и, как показывает численный эксперимент, локализована в резонаторе. Доопределим эту функцию, заданную в Ω', нулем вне области Ω', тогда в силу граничных условий u — непрерывна и кусочно дифференцируема во всей области Ω. Воспользуемся теперь следующим утверждением.

Т е о р е м а Р е л л и х а (из работы [1]). *Последовательность функций $\{u^{(n)}\}$ из $W_2^1(G)$, для которой нормы $||u^{(n)}||^2$ ограничены равномерно сверху некоторой константой C, т. е.*

$$\int\limits_G d\tau |\nabla u^{(n)}|^2 + |u^{(n)}|^2 \leqslant C,$$

содержат подпоследовательность, сходящуюся в среднем, тогда и только тогда, когда она содержит подпоследовательность $\{u^{(n_m)}\}$, для которой

$$\lim_{b \to \infty} \int\limits_{\Omega - \Omega'(b)} |u^{(n_m)}|^2 d\tau = 0$$

равномерно при всех $m = 1, 2, \ldots$.

Поскольку u_1 локализована в резонаторе, выражение

$$\int\limits_G |u_1|^2 d\tau$$

с ростом b остается равномерно ограниченным. Поэтому при любой последовательности чисел $b_m \to \infty$ последовательность $\{u^{(m)} = u_1|_{b=b_m}\}$ сходится в норме $L^2(G)$ к некоторой функции, которая и будет

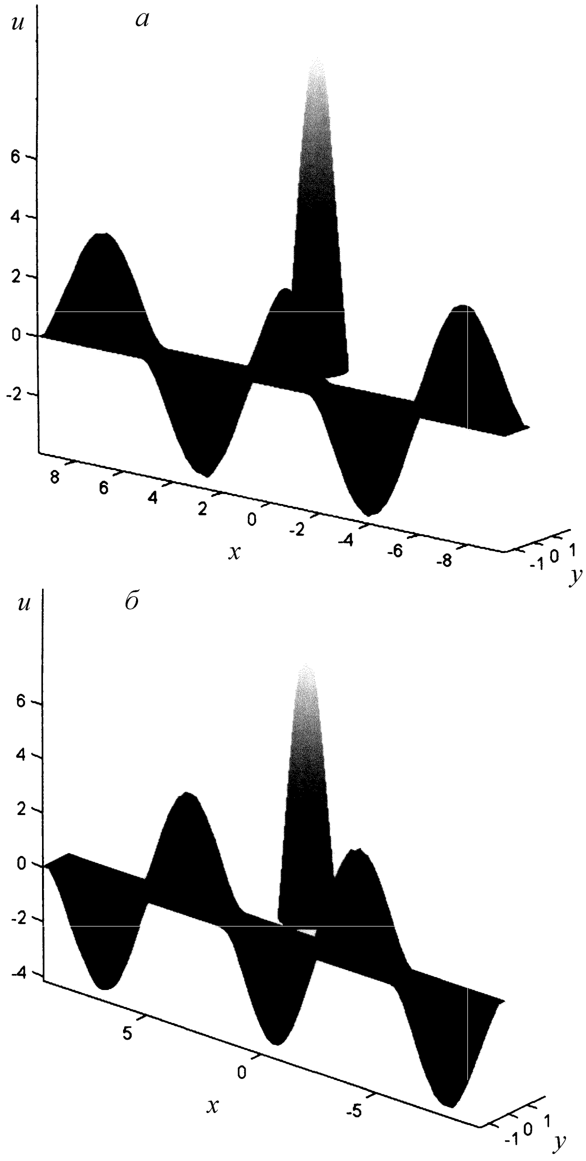

Рис. 2. Собственные функции при (*а*) $\lambda = 5.74$ и (*б*) $\lambda = 5.81$

собственной функцией исходной задачи (1). Таким образом, приходим к известному выводу — существованию изолированной ловушечной моды.

Если же $\lambda_1(a, b)$ не является наименьшим собственным значением области Ω', то при увеличении b к нему будут приближаться другие собственные значения этой области (стремящиеся к нижней границе непрерывного спектра). Как видно на рис. 2, в случае, когда к λ_1 подходит собственное значение, стремящееся при $a \to 0$ к собственному значению задачи Дирихле в области G', графики соответствующих им собственных функций имеют весьма схожий вид. Поэтому, в частности, u_1 не локализована в резонаторе и в силу теоремы Реллиха никакая последовательность $u_1|_{b=b_m}$ при $m \to \infty$ не сходится.

Это обстоятельство проясняет причины, по которым спектральные характеристики волноведущих систем оказываются неустойчивы по отношению к малым возмущениям параметров системы [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00271, 03-01-00166) и программы «Университеты России» (грант УР.02.03.010).

Литература

1. *Rellich F.* // Studies and essays presented to R. Courant. New York, 1948. P. 329.
2. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Philos. Soc. 1954. **49**. P. 668.
3. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 4. С. 606.
4. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**, № 6. С. 744.

Поступила в редакцию
18.04.03