АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.172.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ МЕТОДОМ КУСОЧНОГО ФИТИРОВАНИЯ

В. К. Гришин, Б. С. Ишханов, Г. С. Нефедов

(*НИИЯФ*)

E-mail: grishin@depni.sinp.msu.ru

Представлен новый итерационный метод решения некорректно поставленных задач, основанный на фитировании. Предложенный метод кусочного фитирования был апробирован при восстановлении сечений фотоядерных процессов в исследованиях с тормозными γ-пучками в условиях ограниченной экспериментальной статистики.

Введение

Высокая интенсивность тормозных γ-пучков позволяет получать экспериментальные данные с необходимой статистической обеспеченностью. Однако получение результатов исследований осложнено формой спектра тормозного излучения. В экспериментах на тормозном пучке γ-излучения непосредственно измеряется не сечение $\sigma(E)$ исследуемой реакции, а так называемая фотоядерная кривая выхода $y(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$, связанная с сечением интегральным уравнением

$$y(E_i) = \int\limits_{E_0}^{E_i} A(E_i, E)\sigma(E)\,dE, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $A(E_i, E)$ — функция, представляющая энергетический спектр тормозного γ-излучения [1], E — энергия γ-кванта, E_0 — энергетический порог исследуемой реакции. Будем искать сечение в виде вектора $\sigma = (\sigma_{E1}, \sigma_{E2}, \ldots, \sigma_{En})^T$ размерности n, разбивая интересующий интервал энергий $[E_0, E_m]$ на n равных отрезков. Тогда уравнение (1) с учетом наличия шума ν переходит в уравнение

$$y = A\sigma + \nu. \tag{2}$$

Задача нахождения сечения из уравнения (2) относится к классу некорректно поставленных [2, 3]. Цель проводимых исследований и соответствующего математического моделирования — формирование нового, альтернативного метода решения некорректно поставленных задач, метода, основанного на фитировании (процедура подбора искомых параметров при минимизации некоего функционала).

Попытки восстановления сечений фитированием предпринимались и ранее. В работе [4] описана методика восстановления, где сечение представлялось набором резонансов, а фитированию подвергались параметры резонансов: расположение, амплитуда, ширина. При тестировании эта методика показала стабильный результат, но ее применение для экспериментов с бедной статистикой затруднительно из-за возникающей неоднозначности решения. Предлагаемый метод способен давать результат с высоким разрешением по энергии, в том числе и для бедной статистики.

Метод кусочного фитирования (МКФ)

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — набор искомых параметров, k — число одновременно подбираемых параметров. Для получения одного из возможных решений уравнения (2) последовательно выполняются следующие процедуры: поиск первого приближения (рис. 1, кривая *2*) и затем пошаговое улучшение решения, выполняемое в цикле. Первое приближение σ_0 строится равномерным растяжением оператором C до размерности $n \gg k$ вектора-столбца $\sigma^0_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}} = (x_1, \ldots, x_k)^T$, найденного фитированием. Последующие приближения σ_i строятся из предыдущих σ_{i-1} и векторов $\sigma^i_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}$, найденных фитированием. Модельное сечение $\sigma^i_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}$ конструируется из вектора приближения σ_{i-1}, заменой координат рабочей области случайным образом подбираемыми параметрами. Причем в цикле фитируются не все координаты сечения одновременно, а только принадлежащие выбранной рабочей области. Этим объясняется название метода, а случайный выбор рабочих областей позволяет получать набор возможных, не идентичных решений, на основе которых строится среднее сечение и коридор ошибок (рис. 1, кривая *1*). Модельные сечения $\sigma^i_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}$, $i = 0, \ldots, p$ находятся минимизацией функционала

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\frac{y_i - y_i^{\mathrm{mod}}}{\delta_i}\right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{\sqrt{w_i}}{\delta_i}\right)\left(y_i - y_i^{\mathrm{mod}}\right)\right]^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где y_i, y_i^{mod} — координаты экспериментального и модельного векторов соответственно, $\delta_i = \sqrt{y_i}$ — случайные ошибки (шум), $i=1,\ldots,m$. Для построения модельной кривой выхода $y_i^{\text{mod}} = AG\sigma^i_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}$ используются оператор A в соответствии с (2) и сглаживающий оператор G. От функционала метода наименьших квадратов соотношение (3) отличает присутствие весовых коэффициентов w_i, введение которых существенно повысило устойчивость решения. Весовые коэффициенты МКФ (оценка доверия к соседним интервалам) отражают степень влияния точек экспериментальной кривой на решение, позволяя тем самым извлекать максимум информации из экспериментального материала. Процедуру нахождения параметров $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ минимизацией функционала (3) запишем в виде

$$\left\|Vy - VAG\sigma_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}\right\|_E^2 = \min, \tag{4}$$

где V определяется диагональной матрицей $V_{m\times m}$, $V_{ij} = \sqrt{w_i}/\,\delta_i$, $i=j$. Сформулируем МКФ на основе выбранной математической модели.

Положение 1. Одно из возможных решений уравнения (2) представимо в виде $\sigma^{\text{pos}} = \sigma_p$, где σ_i, $i=1,\ldots,p$, — промежуточные результаты, находятся фитированием параметров $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ в следующей последовательности:

1. $\sigma_0 = CG\sigma^0_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}$ — первое приближение, где $\sigma^0_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}} = (x_1,\ldots,x_k)^T$ — находится при условии (4), $w_i = 1$ $\forall i$, $i=1,\ldots,m$.

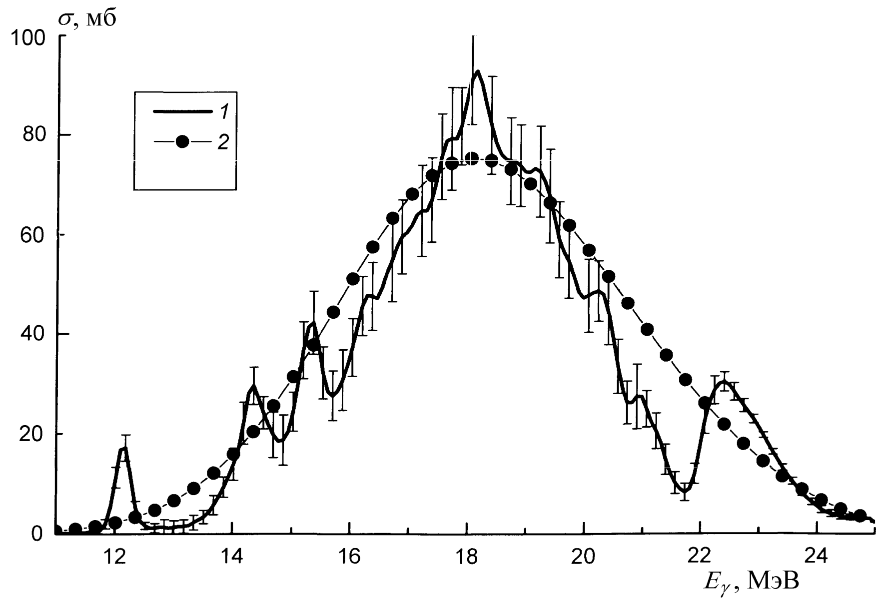

Рис. 1. Результаты обработки методом кусочного фитирования выхода реакции $^{63}\mathrm{Cu}(\gamma,n)^{62}\mathrm{Cu}$ для различных значений разрешения: 100 кэВ (кривая *1*) и 1500 кэВ — первое приближение МКФ (кривая *2*)

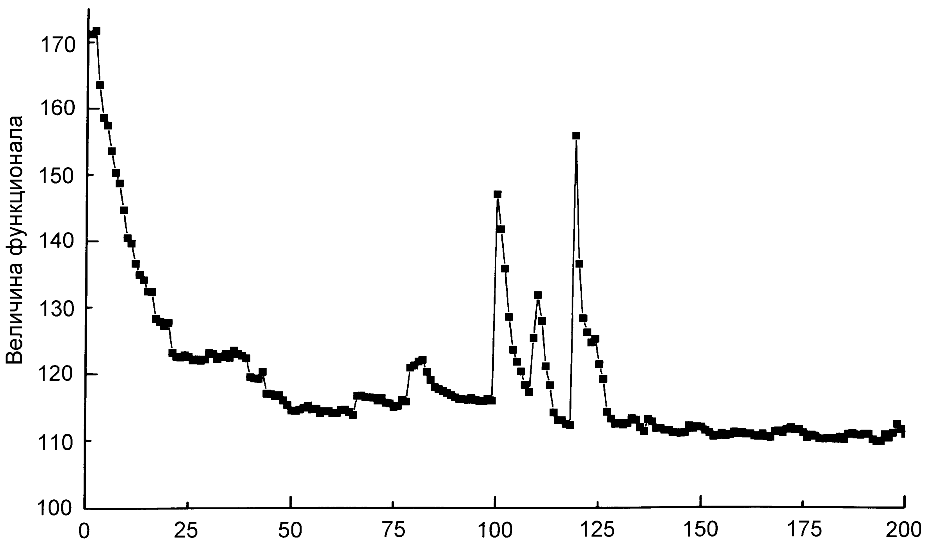

Рис. 2. Значения функционала (3) при фитировании в итерационном цикле

2. $\sigma_i = \frac{q\sigma_{i-1}+G\sigma^i_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}}}{q+1}$, где $\sigma^i_{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}} = \left(\sigma^1_{i-1},\ldots,\sigma^{\xi-1}_{i-1},x_1,\ldots,x_k,\sigma^{\xi+k}_{i-1},\ldots,\sigma^n_{i-1}\right)^T$, находится при условии (4), ξ — случайное число, $q\in N$, $\alpha\in R$,

$$w_i = \left\{0,\ i<\alpha\xi;\ \ 1,\ \alpha\xi\leqslant i\leqslant\alpha(\xi+k); \right.$$
$$\left.\approx\left(\sum_{j=\xi}^{\xi+k} A_{ij}\sigma^j \Big/ \sum_{j=\xi+k}^{n} A_{ij}\sigma^j\right),\ i>\alpha(\xi+k)\right\}.$$

3. Число выполняемых итераций p определяется поведением общего функционала (рис. 2). Критерий остановки итерационного процесса сформулирован в работе [2]: $F\to\mathrm{const}$.

Положение 2. Усредненное решение МКФ представимо в виде $\overline{\sigma} = \sum\limits_{i=1}^{l}\sigma_i^{\mathrm{pos}}\Big/l$, где σ_i^{pos}, $i=1,\ldots,l$ — набор возможных решений уравнения (2), найденных по положению 1. Вектор ошибок равен $\delta_i=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{l}(\sigma_i^{\mathrm{pos}}-\overline{\sigma})^2\Big/l}$.

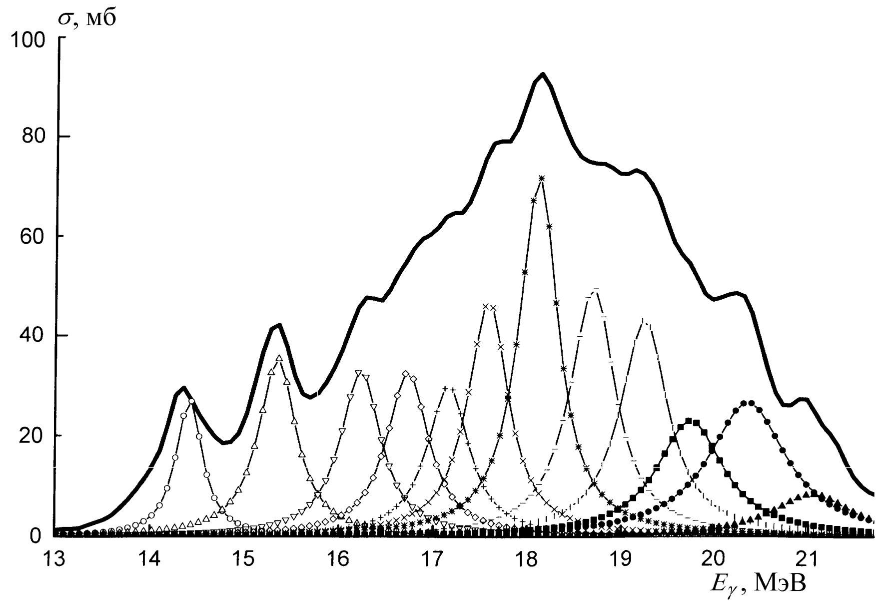

Рис. 3. Результат обработки выхода реакции $^{63}\mathrm{Cu}(\gamma,n)^{62}\mathrm{Cu}$ методом кусочного фитирования (жирная кривая). Результат представлен в виде суперпозиции резонансов (кривые с метками) согласно положению 3

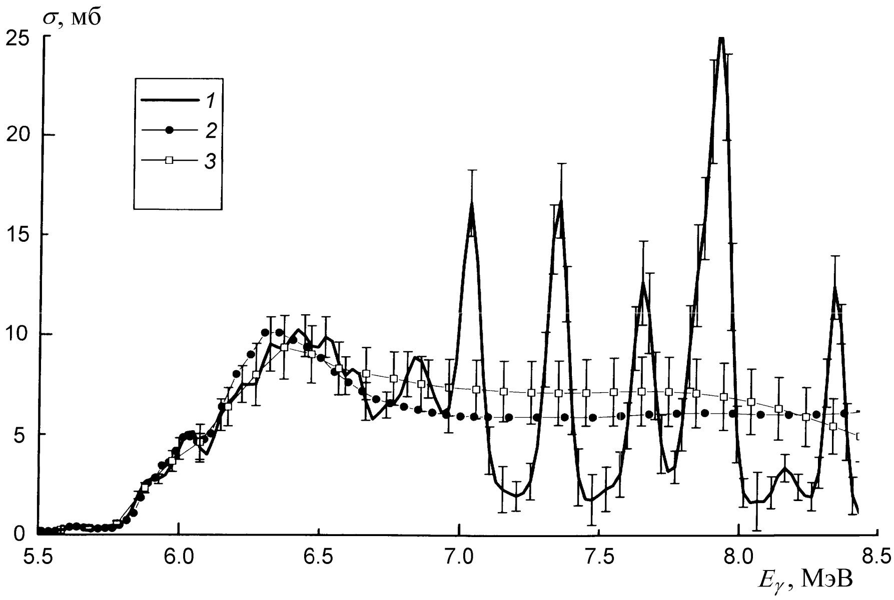

Рис. 4. Результаты обработки различными методами выхода фотоядерной реакции $^{232}\mathrm{Th}(\gamma,f)$: МКФ с разрешением 100 кэВ (кривая *1*), традиционным методом (кривая *2*). Искусственно понизив разрешение результата МКФ, получаем кривую *3*, совпадающую в пределе ошибок с результатом восстановления традиционным способом

Положение 3. Альтернативное представление усредненного решения МКФ представимо в виде суперпозиции резонансов

$$\overline{\sigma}(E)=\sum_{j=1}^{z}\frac{\overline{\Theta}^j\left(\overline{\Gamma}^j\right)^2}{\left(E-\overline{E}^j\right)^2+\left(\overline{\Gamma}^j\right)^2},$$

где $\overline{\Theta}^j=\sum\limits_{i=1}^{l}\Theta_i^j\Big/l$, $\overline{E}^j=\sum\limits_{i=1}^{l}E_i^j\Big/l$, $\overline{\Gamma}^j=\sum\limits_{i=1}^{l}\Gamma_i^j\Big/l$, z — число резонансов, j — номер резонанса, i — номер испытания. Параметры Θ_i^j, E_i^j, Γ_i^j $(i=1,\ldots,l;$ $j=1,\ldots,z)$ определяются минимизаций функционалов

$$F_i\left(\Theta_i^1,E_i^1,\Gamma_i^1,\ldots,\Theta_i^z,E_i^z,\Gamma_i^z\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma_i^{\mathrm{pos}}-\sigma_i^{\mathrm{mod}}}{\delta_i}\right)^2,$$

где σ_i^{pos} — возможные решения уравнения (2), найденные по положению 1,

$$\sigma_i^{\mathrm{mod}}(E)=\sum_{j=1}^{z}\frac{\Theta_i^j\left(\Gamma_i^j\right)^2}{\left(E-E_i^j\right)^2+\left(\Gamma_i^j\right)^2}.$$

Ошибки $\delta\Theta^j$, δE^j, $\delta\Gamma^j$ при $j=1,\ldots,z$ задаются дисперсионной формулой.

В качестве подтверждения высказанных положений выступают факты, установленные в результате численного эксперимента: поведение общего функционала (3) в итерационном цикле показывает сходимость метода (рис. 2); найдены оптимальные значения ключевых параметров МКФ (используемых далее для физических приложений): $k\approx 50$, $n=4k$, $q=4$, $p\sim 10^2$, $l\geqslant 20$. Проверки на модельных сечениях показали, что модельная кривая укладывается в полученный коридор ошибок.

Пройдя тестовые испытания, МКФ был применен для восстановления экспериментальных данных, показав при этом устойчивость результата и универсальность. В работе представлены результаты восстановления сечений фотоядерных реакций $^{63}\mathrm{Cu}(\gamma,n)^{62}\mathrm{Cu}$ (рис. 1, 3) и $^{232}\mathrm{Th}(\gamma,f)$ (рис. 4) на основе имеющихся кривых выхода [6]. Полученные решения находятся в статистическом соответствии с результатами восстановления методом редукции [6], что подтверждает эффективность нового метода. Процедура фитирования осуществлялась с использованием пакета MINUIT [5].

Авторы выражают благодарность В.В. Варламову за плодотворное обсуждение результатов.

Литература

1. *Ишханов Б.С., Капитонов И.М.* Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами. М., 1979.
2. *Гришин В.К., Ишханов Б.С., Нефедов Г.С.* // Вестн. Моск. ун-та. 2002. Физ. Астрон. № 3. С. 44 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 3. P. 65).
3. *Kahaner D., Moler C., Nash S.* Numerical Methods and Software. Prentice-Hall International, 1989.
4. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
5. *James F.* MINUIT 94.1 (User manual). Geneva, 1994.
6. *Варламов В.В., Ишханов Б.С., Руденко Д.С.* Препринт НИИЯФ МГУ 2002-19/703.

Поступила в редакцию
12.03.03

РАДИОФИЗИКА

УДК 534

АТТРАКТОР-ТОР В ТРЕХМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ

П. В. Елютин

(*кафедра квантовой электроники*)

E-mail: pve@shg.phys.msu.su

Построен пример модели трехмерной автономной модели с аттрактором-тором двухчастотного квазипериодического движения.

Исследование устойчивого двухчастотного движения и его трансформаций в диссипативных динамических системах имеет давнюю историю. Еще в период становления теории колебаний были сформулированы основные парадигмы — гармонически зависящее от времени воздействие на автономную автоколебательную систему (синхронизация генератора внешней силой) и взаимодействие двух автономных автоколебательных систем (взаимная синхронизация генераторов), — вошедшие в учебники [1, 2]. Аттрактором первой из них является цилиндр в трехмерном (расширенном) фазовом пространстве, а второй — тор в четырехмерном пространстве. Новый стимул к развитию исследование