ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145; 530.12:531.51

# ГРУППОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

**О. Д. Тимофеевская, О. А. Хрусталев, М. В. Чичикина**

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: chich@goa.bog.msu.ru

**Представлена схема квантования гравитационного поля на классическом фоне с помощью групповых переменных Боголюбова.**

## Введение

В настоящей работе представлен подход к описанию гравитационного поля с точки зрения квантовой теории. Мы рассматриваем квантование в окрестности точных решений уравнений Эйнштейна с использованием преобразования Боголюбова [1].

Метод групповых переменных Боголюбова имеет ряд преимуществ при квантовании на классическом фоне систем с непрерывной симметрией: преобразование Боголюбова позволяет избежать проблемы нулевых мод и точно учесть законы сохранения при построении теории возмущений.

Основная идея метода состоит во введении новых переменных, которые имеют смысл параметров группы симметрии системы. Новые переменные оказываются циклическими, в то время как канонически сопряженные им величины совпадают с интегралами движения. Следовательно, они коммутируют с гамильтонианом, что обеспечивает автоматическое выполнение законов сохранения.

Метод переменных Боголюбова широко применяется [2–7]. Однако использование его для систем, чьи группы симметрии включают преобразование времени, затруднительно, поскольку структура гамильтониана как генератора временных трансляций становится ясной только после решения уравнений движения, так что задача представляется несколько неопределенной.

В работах [8] мы предложили обойти эту проблему путем параллельного развития теории возмущений и уточнения формулы преобразования Боголюбова. Эта схема применима для любой системы, допускающей существование симплектической структуры, в том числе для гравитации [9–27].

## 1. Формализм описания пространства-времени

Для описания гравитационного поля используется (3+1)-мерный формализм (Arnowitt–Deser–Misner, ADM).

Метрический тензор представляет собой матрицу

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^t b_t & b_t \\ b_t & \gamma_{st} \end{pmatrix},$$

где $\gamma_{st}$ — метрика трехмерного пространства, вложенного в четырехмерное многообразие. Параметры $a$ и $b_t$ выбраны таким образом, что выполняется соотношение $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$.

Канонически сопряженный импульс $\pi^{st}$ определяется следующим образом:

$$\pi^{st} = -\sqrt{\gamma}\left(K^{st} - \gamma^{st}K\right),$$

где

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\det\|\gamma_{st}\|}; \quad K_{tp} = -a\Gamma^0_{tp};$$

$$\Gamma^s_{tp} = \frac{1}{2}\gamma^{sp}\Gamma_{tlp}; \quad \Gamma_{tlp} = \gamma_{pl,t} + \gamma_{pt,l} - \gamma_{tl,p}.$$

Пусть 4D многообразие с заданой метрикой допускает выбор пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma$, и на этой гиперповерхности можно задать поле нормалей. Эти нормали касательны геодезическим линиям и определяют временную координату. Тогда геометрия 4D многообразия может быть описана в Гауссовых координатах:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & \gamma_{st} \end{pmatrix}.$$

Гиперповерхность $\Sigma$ может быть выбрана следующим образом.

Пусть в точке $X$, принадлежащей гиперповерхности $\Sigma$, задан вектор нормали $\mathbf{n}$. Выберем произвольную замкнутую кривую $K \subset \Sigma$, принадлежащую гиперповерхности и проходящую через точку $X$. После перенесения нормали $\mathbf{n}$ вдоль этой кривой ее направление должно совпадать с первоначальным — это критерий выбора гиперповерхности $\Sigma$. Было показано (Choquet-Bruhat), что этот критерий удовлетворяется, если наложить уравнения связи на гамильтониан:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st}\pi^{st} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\sqrt{\gamma}R = 0$$

и импульс:

$$\pi^{sl}_{;l} = 0.$$

Общие принципы канонического формализма для систем со связями приводят к следующему утверждению (Lichnerovitch, Choquet-Bruhat, Dirac, Antrowitt–Deser–Misner):

если на описанной выше гиперповерхности выполнены уравнения эволюции

$$\gamma_{st,0} = \frac{2a}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st} - \frac{1}{2}\gamma_{st}\pi\right) + b_{s;t} + b_{t;s};$$

$$\pi^{st}_{,o} = -a\sqrt{\gamma}\left(R^{st} - \frac{1}{2}\gamma^{st}R\right) +$$
$$+\frac{a}{2\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{st}\pi^{st} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\gamma^{st} + \frac{a}{2\sqrt{\gamma}}\left(\pi^s_l\pi^{lt} - \frac{1}{2}\pi^{st}\pi\right) +$$
$$+\sqrt{\gamma}\left(\gamma^{sl}c^t_{;l} - \gamma^{st}c^l_{;l}\right) + \left(\pi^{st}b^l\right)_{;l} - \pi^{sl}b^t_{;l} - \pi^{lt}b^s_{;l};$$
$$c^l = \gamma^{ls}a_{;s},$$

то в 4D многообразии верны уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad \left(R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0\right).$$

## 2. Переменные Боголюбова

Пусть переменные $x'$ связаны с $x$ групповым преобразованием:

$$x' = f(x,a), \ \ x'' = f\left(f(x,a), b\right) = f(x,c), \ \ c = \varphi\left(a,b\right).$$

Вариации координат при вариации параметров группы $a$:

$$\left(\delta x'\right)^i = \xi^i_s(x')B^s_p(a)\delta a^p,$$

где $i = 0,1,2,3$ — номер координаты, $p = 1,\ldots,r$ и $r$ — число генераторов группы, групповые свойства преобразования определены тензором $B^s_p(a)$.

Заметим, что выполнение законов сохранения в искривленном пространстве-времени связано с существованием векторов Киллинга и не является прямым следствием инвариантности системы относительно групповых преобразований.

В нашем случае преобразование Боголюбова восстанавливает инвариантность системы относительно групповых преобразований, которая была нарушена явным выделением классической компоненты.

Это означает следующее: если процедура квантования будет проведена на некоторой гиперповерхности $\Sigma$ в определенный момент времени, то использование метода Боголюбова позволяет сдвигать эту поверхность $\Sigma$ в соответствии с групповыми законами (в том числе преобразуя временную координату).

Рассмотрим пару некоторых функций $f_{st}(x)$, $f^{st}_n(x)$ и определим преобразование Боголюбова как переход к другим функциям $u_{st}(x')$, $u^{st}_n(x')$ и переменным $a^p$:

$$f_{st}(x) = gv_{st}(x') + u_{st}(x'), \quad f^{st}_n(x) = gv^{st}_n(x') + u^{st}_n(x'), \tag{1}$$

где безразмерный параметр $g$ предполагается большим, групповые параметры $a^p$ — это новые независимые переменные (переменные Боголюбова). Смысл функций $v_{st}(x')$ и $v^{st}_n(x')$ станет ясен в процессе построения теории возмущений.

Замена $f_{st}(x) \to u_{st}$, $a^p$ увеличивает число независимых переменных на $r$, и поэтому возникает проблема формулировки дополнительных инвариантных условий, которые следует наложить на функции $u_{st}(x')$, чтобы уравнять число независимых переменных в обеих частях уравнения (1).

Мы рассматриваем системы, в которых существуют инвариантные симплектические формы вида

$$\omega\left(u_{st}, N^{stp}\right) \equiv \int\limits_{\Sigma}(u^{st}_n(x')N^p_{st}(x') - u_{st}(x')N^{stp}_n(x'))d\sigma,$$

где $\Sigma$ — некоторая пространственноподобная гиперповерхность. Далее в статье везде подразумевается суммирование по всем индексам $s$ и $t$.

Необходимые дополнительные условия, уравнивающие число переменных в (1), формулируем в виде

$$\omega\left(u_{st}, N^{stp}\right) = 0. \tag{2}$$

Мы выбираем некоторые функции $N^p_{st}(x')$ ($p = 1,\ldots,r$, число функций равно числу новых независимых переменных).

С помощью замены $u_{st}(x')$ в соответствии с (1) можно получить уравнения, определяющие групповые переменные как функционалы $f_{st}(x)$ и $f^{st}_n(x)$ на $\Sigma$.

Поскольку $\omega(N^a_{st}, u_{st})$ инвариантно относительно вариаций $a^p$, имеем

$$-\int\limits_{\Sigma} d\sigma\left(\delta f_{st}(x)N^{stk}_n(x') - \delta f^{st}_n(x)N^k_{st}(x')\right) - \\ -gB^s_p(a)\delta a^p - B^r_p(a)\delta a^p R^s_r = 0, \tag{3}$$

где

$$R^k_r = \int\limits_{\Sigma} d\sigma\xi^i_r(x')\left(N^{stk}_{ni}(x')u_{st}(x') - N^k_{sti}(x')u^{st}_n(x')\right).$$

Полезно сформулировать уравнение (3) в дифференциальной форме:

$$\frac{\delta a^p}{\delta f_{st}(x)} = -\frac{1}{g}A^p_k(a)N^{stk}_n(x') - \frac{1}{g}\frac{\delta a^q}{\delta f_{st}(x)}B^r_q(a)R^s_rA^p_s(a),$$
$$\frac{\delta a^p}{\delta f^{st}_n(x)} = \frac{1}{g}A^p_k(a)N^k_{st}(x') - \frac{1}{g}\frac{\delta a^q}{\delta f^{st}_n(x)}B^r_q(a)R^s_rA^p_s(a),$$

$A^p_s(a)$ — матрица, обратная $B^s_q(a)$:

$$B^s_q(a)A^p_s(a) = \delta^p_q.$$

Обозначим

$$N^k_{st}(x')T^l_k = D^l_{st}(x'),$$

где $T^l_s$ — решение уравнения:

$$T^l_s = \delta^l_s - \frac{1}{g}T^r_sR^l_r.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta a^p}{\delta f_{st}(x)} = \frac{1}{g}A^p_l(a)D^{stl}_n(x'),$$

$$\frac{\delta a^p}{\delta f_n^{st}(x)} = -\frac{1}{g} A_l^p(a) D_{st}^l(x').$$

Следствием уравнения (3) является линейная зависимость между производными по $u_{st}(x')$ и $u_n^{st}(x')$:

$$\int\limits_\Sigma d\sigma \left( M_{str}(x') \frac{\delta}{\delta u_{st}(x')} + M_{nr}^{st}(x') \frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')} \right) = 0,$$

где

$$\xi_r^i(x') v_{sti}(x') = M_{str}(x'),$$
$$\xi_r^i(x') v_{ni}^{st}(x') = M_{nr}^{st}(x').$$

При выводе этой зависимости мы требовали выполнения условия

$$\omega \left( M_{sta} N^{stk} \right) = \delta_a^k.$$

Прямые вычисления позволяют выразить $f_{st}(x)$ и $f_n^{st}(x)$ в терминах новых переменных:

$$\frac{\delta}{\delta f_{st}(x)} = \frac{\delta}{\delta u_{st}(x')} + B_q^p(a) \frac{\delta a^q}{\delta f_{st}(x)} \left( S_p + A_p^r(a) \frac{\partial}{\partial a^r} \right),$$
$$\frac{\delta}{\delta f_n^{st}(x)} = \frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')} + B_q^p(a) \frac{\delta a^q}{\delta f_n^{st}(x)} \left( S_p + A_p^r(a) \frac{\partial}{\partial a^r} \right),$$

где $S_p$ есть выражение

$$-\int\limits_\Sigma d\sigma \xi_p^i(x') \left( u_{sti}(x') \frac{\delta}{\delta u_{st}(x')} + u_{ni}^{st}(x') \frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')} \right) = \\ = S_p.$$

Полученные выражения позволят в следующих статьях развить теорию возмущений в терминах новых переменных.

## Заключение

Получена возможность описать гравитационное поле в терминах групповых переменных. Теперь задачей является построение регулярной теории возмущений и пространства состояний системы, что будет выполнено в двух последующих статьях.


**Литература**

1. *Боголюбов Н.Н.* // Укр. матем. журн. 1950. **2**. С. 3.
2. *Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А.* // ТМФ. 1972. **10**. С. 162; **11**. С. 317; 1973. **12**. С. 164.
3. *Тимофеевская О.Д.* // ТМФ. 1983. **54**. С. 464.
4. *Christ N.H., Lee T.D.* // Phys. Rev. 1975. **D12**. P. 1606.
5. *Tomboulis E.* // Phys. Rev. 1975. **D12**. P. 1678.
6. *Greutz M.* // Phys. Rev. 1975. **D12**. P. 3126.
7. *Свешников К.А.* // ТМФ. 1985. **55**. С. 361.
8. *Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // ТМФ. 1997. **111**, № 2. С. 242; № 3. С. 412.
9. *Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.* // Phys. Rev. 1960. **120**, No. 1, P. 863.
10. *Newman E.T., Tamburino L., Unti T.* // J. Math. Phys. 1963. **7**, No. 5. P. 915.
11. *Newman E.T., Penrose L.* // J. Math. Phys. 1966. **7**, No. 5. P. 863.
12. *Misner W.* // J. Math. Phys. 1967. **4**, No. 7. P. 924.
13. *Choquet-Bruhat Y., Georch R.* // Commun. Math. Phys. 1969. No. 14. P. 329.
14. *York J.W.* // Phys. Rev. Letters. 1971. **26**, No. 26. P. 1656.
15. *York J.W.* // J. Math. Phys. 1972. **13**, No. 2. P. 125.
16. *Fisher A.E., Marsden J.E.* // J. Math. Phys. 1972. **13**, No. 4. P. 546.
17. *Kuchar K.* // J. Math. Phys. 1972. **13**, No. 5 P. 768.
18. *Fulling S.A.* // Phys. Rev. 1973. **D7**, No. 10. P. 2850.
19. *Murchadha N.O., Jork J.W.* // Phys. Rev. 1974. **D10**, No. 2. P. 428.
20. *Regge T., Teiteloim C.* // Ann. Phys. 1974. No. 88. P. 286.
21. *Cramer D.* // Acta Phys. Polon. 1975. No. 4. P. 467.
22. *Cordero P., Teiteloim C.* // Ann. Phys. 1976. No. 100. P. 607.
23. *Fisher A.E., Marsden J.E.* // Gen. Relat. and Grav. 1976. **7**, No. 12. P. 915.
24. *Kuchar K.* // J. Math. Phys. 1976. **17**, No. 5. P. 777.
25. *Gibbsons G.W., Page D.N., Pope C.N.* // Commun. Math. Phys. 1990. No. 127. P. 529.
26. *Gomes R., Laguna P., Papadopoulos Ph., Winicour J.* // gr-qc/9603060. 1996.
27. *Rovelli C.* // gr-qc/0006061. 2000. **2**.


Поступила в редакцию
23.10.02