

УДК 621.372.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЛНОВОДНОГО ПЕРЕХОДА

А. Н. Боголюбов, И. А. Буткарев

(кафедра математики)

E-mail: butkarev@afrodita.phys.msu.su

Работа посвящена применению метода конечных элементов при решении задач расчета волноведущих систем на примере исследования специального волноводного перехода с согласующим ребром между прямоугольным и компланарным волноводами.

Введение

Метод конечных элементов в настоящее время достаточно широко применяется при расчете волноведущих систем [1]. Одним из несомненных достоинств этого метода является возможность построения на его основе универсальных алгоритмов для расчета волноведущих систем со сложной геометрией и неоднородным заполнением. Кроме того, метод конечных элементов позволяет непосредственно вычислять распределение поля в системе. В настоящей работе рассматривается применение метода конечных элементов для расчета широкополосного волноводного перехода с согласующим ребром, работающего в СВЧ диапазоне (рис. 1). Такой переход может быть использован для обеспечения плавного, с малым отражением соединения волновода с компланарной интегральной схемой, а также с транзистором или лазером [2]. Из симметричного расположения согласующего ребра вытекает, что данный переход особенно эффективен при передаче нечетных мод.

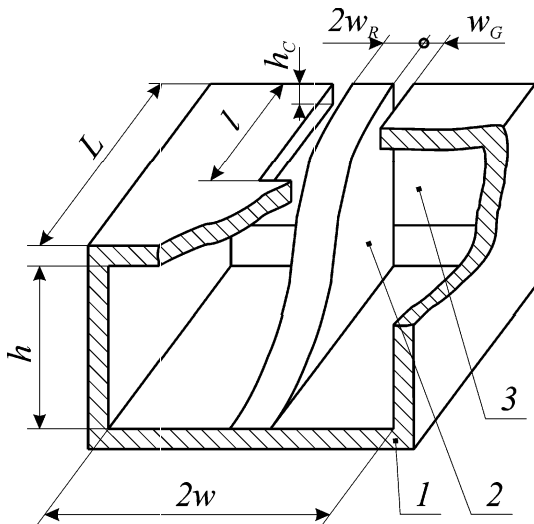


Рис. 1. Конструкция перехода: 1 — входное сечение, 2 — ребро, 3 — выходное сечение

1. Постановка задачи

Задачу расчета волноводного перехода можно поставить как поиск распределения поля в области, соединяющей два волновода разных типов при

заданном сигнале, возбуждающем один из волноводов. Рассмотрим случай распространения нечетных ТЕ-мод через переход с согласующим ребром. Учитывая симметрию поля и перехода, можно ограничиться рассмотрением половины данной согласующей системы. Обозначим через u z -компоненту магнитного вектора Герца: $u = \Pi_z^m$. Тогда, предполагая временную зависимость поля в виде $e^{-i\omega t}$, приходим к задаче решения однородного уравнения Гельмгольца в ограниченной области D . Все металлические поверхности предполагаются идеально проводящими.

Для ограничения области в продольном направлении во входном и выходном сечениях поставим парциальные условия излучения [3]. При этом под входным мы понимаем прямоугольный волновод, а под выходным — компланарный. Граничные условия на идеально проводящих поверхностях заключаются в равенстве нулю касательной компоненты вектора напряженности электрического поля. Это приводит к уравнению $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ на граничных плоскостях и плоскостях согласующего ребра с нулевой компонентой вектора нормали вдоль оси z и уравнению $u = 0$ на остальных поверхностях. На плоскости симметрии системы требуется равенство нулю z -составляющей вектора Герца. Введем декартову систему координат с началом, расположенным в плоскости симметрии перехода на его нижнем основании, ось x направим перпендикулярно плоскости симметрии, а ось z — вдоль оси волноведущей системы. Входное сечение перехода находится в плоскости $z = 0$. Краевая задача принимает вид

$$\Delta u + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} u = 0, \quad P \in D, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_P = 0, \quad P \in \partial D \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_B), \quad (2)$$

$$u|_P = 0, \quad P \in S_B, \quad (3)$$

$$u|_{P \in S_1} = u_0(x, y, z) + \sum_n R_n e^{-i\gamma_n^{(1)} z} \varphi_n^{(1)}(x, y), \quad (4)$$

$$u|_{P \in S_2} = \sum_n T_n e^{i\gamma_n^{(2)} z} \varphi_n^{(2)}(x, y), \quad (5)$$

где S_1 — входное сечение, S_2 — выходное сечение, S_B — поверхность, на которой заданы условия Дирихле, ϵ — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная восприимчивость, c — скорость света, $\gamma_n^{(1,2)}$ — постоянные распространения мод прямоугонльного и компланарного волноводов, $\varphi_n^{(1,2)}$ — функции сечения входного и выходного волноводов, u_0 — падающее поле, R_n — амплитуды отраженных мод, T_n — амплитуды мод, возбужденных в выходном волноводе.

2. Применение метода конечных элементов для решения краевой задачи

Для решения поставленной краевой задачи (1)–(5) применяется метод конечных элементов [4]. Моды выходного компланарного волновода $\varphi_n^{(2)} e^{i\gamma_n^{(2)}z}$ вычислялись с помощью метода двумерных конечных элементов. Однородное заполнение всего волновода позволяет вычислять моды компланарного волновода только один раз. Если бы рассматривался компланарный волновод с подложкой, то пришлось бы строить моды для каждой частоты отдельно. Моды входного волновода $\varphi_n^{(1)} e^{i\gamma_n^{(1)}z}$ строятся аналитически.

Для построения решения в области D использовался метод трехмерных конечных элементов. В соответствии с этим методом в области D вводится система функций с конечными носителями ψ_n (базисных функций). Для их построения область разбивается на тетраэдры. Функция ψ_n определяется следующим образом: носителем данной функции является объединение тетраэдров, одна из вершин которых имеет индекс n , в каждом таком тетраэдре функция ψ_n является линейной и при этом обращается в нуль на грани, не содержащей вершину с индексом n . В силу того что на границе S_B поле обращается в нуль, можно исключить из рассмотрения вершины, расположенные на ней. В результате получим систему N базисных функций. Рассмотрим конечномерное пространство, образованное системой функций ψ_n . Записывая уравнение (1) в слабой формулировке, применим к нему теорему Грина, что позволит понизить порядок производных под знаком интеграла:

$$\int_D \left(-\nabla u \nabla \psi_n + \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} u \psi_n \right) dv + \int_{S_1 \cup S_2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \psi_n ds = 0. \tag{6}$$

Решение данного уравнения ищем в форме ряда по базисным функциям:

$$u^N = \sum_{i=1}^N A_i \psi_i. \tag{7}$$

Второй интеграл в уравнении (6) преобразуем, используя условия излучения (4), (5). Для этого

ограничимся лишь конечным числом слагаемых в соответствующих уравнениях и предположим, что из прямоугонльного волновода на переход падает только одна мода l :

$$u_1^N |_{P \in S_1} = U_l e^{i\gamma_l^{(1)}z} \varphi_l^{(1)}(x, y) + \sum_{n=1}^{M_1} R_n^N e^{-i\gamma_n^{(1)}z} \varphi_n^{(1)}(x, y), \tag{8}$$

$$u_2^N |_{P \in S_2} = \sum_{n=1}^{M_2} T_n^N e^{i\gamma_n^{(2)}z} \varphi_n^{(2)}(x, y), \tag{9}$$

где U_l — амплитуда падающего поля. Рассмотрим проекционные соотношения в плоскостях S_1 и S_2 :

$$\int_{S_i} (u^N - u_i^N) \varphi_m^{(i)} ds = 0, \quad i = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots, M_i, \tag{10}$$

$$\int_{S_i} \left(\frac{\partial u^N}{\partial z} - \frac{\partial u_i^N}{\partial z} \right) \psi_k ds = 0, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Подставляя выражения (7), (8) в уравнение (10) и учитывая ортогональность мод, находим коэффициенты отражения R_n^N . Исключая из уравнения (8) R_n^N и подставляя полученное выражение в (11), определим выражение для

$$\int_{S_1} \frac{\partial u^N}{\partial z} \psi_k ds = - \int_{S_1} \frac{\partial u^N}{\partial \mathbf{n}} \psi_k ds.$$

Аналогично можно преобразовать интеграл от $\psi_k \partial u^N / \partial \mathbf{n}$ по поверхности S_2 .

После подстановки полученных таким образом выражений для интегралов по поверхностям $S_{1,2}$, а также выражения (7) в уравнение (6) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i в разложении (7). Для ее решения используется метод минимальной степени [5]. Данный метод заключается в минимизации заполнения на каждом шаге исключения по методу Гаусса. При этом скорость счета существенно увеличивается.

После того как найдены коэффициенты A_i , можно вычислить коэффициенты отражения и пропускания данного перехода, а также определить потоки энергии. Выполнение закона сохранения энергии может служить одним из способов проверки данного алгоритма.

Аналогично может быть рассмотрена задача с однородными граничными условиями Дирихле на всех поверхностях, кроме $S_1 \cup S_2$, которая соответствует электрическому вектору Герца. Для ее решения достаточно исключить из рассмотрения базисные функции, отличные от нуля на металлических поверхностях.

Сходимость метода конечных элементов может быть установлена стандартным способом [6].

3. Результаты

С помощью построенного алгоритма были рассчитаны различные конфигурации волноводного перехода. Рассматривалось влияние формы ребра и размеров перехода на его характеристики.

Рассмотрим переход между прямоугольным волноводом ($w = 0.1$, $h = 0.15$) и компланарным волноводом ($w_R = 0.00635$, $w_G = 0.00635$, $h_C = 0.1$). Отметим, что здесь и в дальнейшем все размеры даны в сантиметрах. Вначале исследуем влияние длины щели l . На рис. 2 представлена зависимость коэффициента отражения (штриховая линия) и пропускания (пунктир) от частоты при $L = 0.5$, $l = 0.4$ и синусоидальном согласующем ребре.

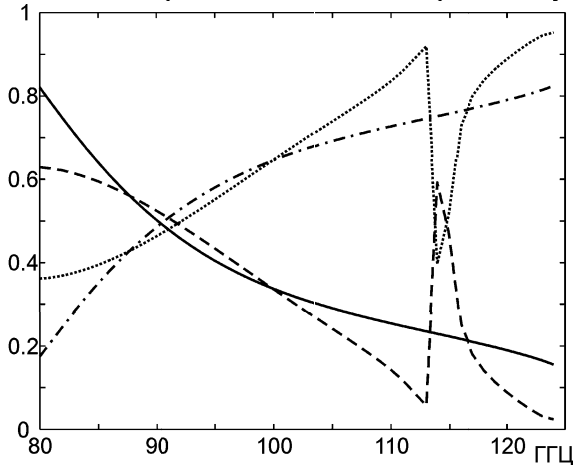


Рис. 2. Графики коэффициентов отражения и пропускания для перехода без ребра и с ребром

Форма ребра описывается следующим уравнением:

$$y = \frac{h + h_C}{2} \left(1 + \sin \pi \left(\frac{z}{L} - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (12)$$

Вычисления при $l = 0.35$ и $l = 0.3$ показали, что изменение характеристик перехода не превышает нескольких процентов. На рис. 2 также представлены графики коэффициента отражения (сплошная линия) и пропускания (штрихпунктир) для случая волноводного перехода без согласующего ребра. Из рисунка видно, что преимущество применения синусоидального согласующего ребра указанной длины проявляется лишь в небольшом диапазоне частот.

При исследовании влияния длины перехода L на коэффициент отражения фиксировался профиль ребра (подобный (12)) и параметр $L - l = 0.1$. Проведенные расчеты показали, что длина перехода практически не влияет на величину коэффициента отражения. Однако ясно, что увеличение длины перехода расширяет выбор профилей ребра.

Убедимся, что профиль ребра является главным фактором, влияющим на характеристики перехода. Для оценки влияния формы ребра на характеристики перехода фиксировались все остальные параметры ($L = 0.3$, $l = 0.2$) и рассматривалось треугольное

ребро

$$y = \begin{cases} 0, & z \leq z_T, \\ (z - z_T)(h + h_C)/(L - z_T), & z_T < z \leq L. \end{cases}$$

На рис. 3 представлены графики зависимости коэффициента отражения от частоты для различных значений параметра z_T . Из графика следует, что профиль определяет характеристики данного волноводного перехода.

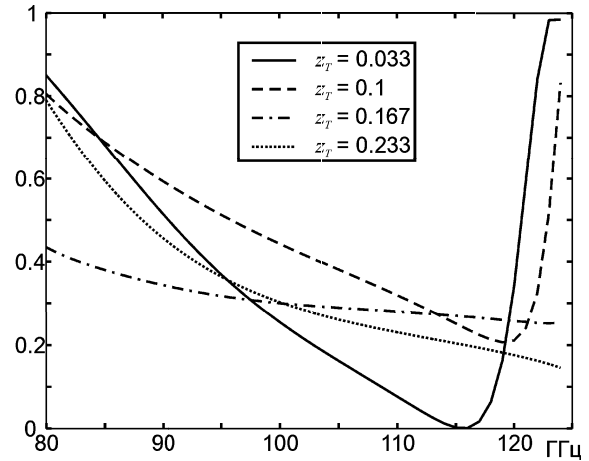


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от частоты при различных значениях параметра z_T

Число базисных функций N в приведенных расчетах составляло от 7 до 11 тысяч.

Выводы

Метод конечных элементов обладает большой универсальностью. Если известно разбиение области на конечные элементы и есть алгоритм поиска мод подключенных волноводов, то применение метода конечных элементов не вызывает сложностей. Однако данный подход, особенно в трехмерном случае, требует существенных вычислительных затрат, а также большого объема памяти. Поэтому в различных частных случаях строятся специальные алгоритмы вычисления характеристик волноведущих систем.

Как уже отмечалось, в отличие от некоторых других методов, метод конечных элементов позволяет вычислять непосредственно распределение поля. Таким образом, можно сразу оценить влияние тех или иных компонентов волноведущей системы на поле и в определенной степени предсказывать изменение характеристик перехода при изменении данных элементов, что крайне важно при решении задачи математического проектирования таких систем [7].

Введение заполнения под проводящим слоем компланарного волновода не вызывает принципиальных сложностей, однако при этом необходимо, как было указано, для каждой частоты независимо вычислять моды. Возможно также рассмотрение векторной задачи в полной постановке, но при этом существенно увеличивается число уравнений в получающейся линейной системе.

Учитывая текущие темпы роста производительности вычислительной техники, можно сделать вывод, что метод конечных элементов будет находить все более широкое применение в различных областях науки и техники.

Литература

1. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В. и др. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39.
2. Dalman G.C. // Microwave J. 1992. 35, No. 10. P. 109.

3. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М., 1991.
4. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М., 1981.
5. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М., 1988.
6. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
7. Боголюбов А.Н., Буткарев И.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 2. С. 3.

Поступила в редакцию
11.11.02

УДК 517.984.5

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СВЕДЕНИЕМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ

В. П. Моденов

(кафедра математики)

Методом редукции к задаче Коши вычисляются собственные значения оператора Лапласа краевой задачи, описывающей собственные акустические колебания сферы, с несамосопряженным граничным условием третьего рода.

Задача Штурма–Лиувилля о нахождении собственных значений и соответствующих им собственных функций относится к классическим задачам математической физики [1, 2]. Она содержит два вопроса. Первый, связанный с нахождением собственных значений, представляет самостоятельный интерес и может рассматриваться независимо от второго — нахождения собственных функций.

Корректность математической постановки задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого рода (существование, единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части уравнения), а также большой арсенал приближенных аналитических и численных методов ее решения (методы Эйлера, Рунге–Кутта, Адамса, Крылова и т. д.) делают актуальным метод редукции к данной задаче задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим основанный на этом методе эффективный алгоритм вычисления собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, не требующий вычисления собственных специальных функций. Он использует редукцию краевой задачи Штурма–Лиувилля с граничным условием третьего рода, содержащим параметр, к задаче Коши для дифференциального уравнения с производной по этому параметру и алгебраической правой частью (дифференциально-параметрический метод [3]). Рассматриваемый алгоритм позволяет находить комплексные собственные значения без вычисления комплекснозначных собственных специальных функций, что часто сопряжено

со значительными трудностями. Этот алгоритм дает также возможность получать для собственных значений приближенные аналитические формулы.

В работе [4] метод редукции задачи Штурма–Лиувилля к задаче Коши был применен для вычисления собственных значений третьей краевой задачи для уравнения Бесселя.

В данной работе метод обобщается на оператор Штурма–Лиувилля общего вида, а также вычисляются собственные значения оператора Лапласа третьей краевой задачи для сферы [2]. Эта краевая задача связана с исследованием собственных акустических колебаний сферического резонатора с граничным несамосопряженным условием третьего рода.

В качестве начальных данных задачи Коши, получаемой методом редукции, принимаются собственные значения соответствующих задач Штурма–Лиувилля с граничными условиями Дирихле или Неймана. В задаче на собственные значения для сферы это нули сферической функции Бесселя I рода и ее производной, для которых существует эффективный алгоритм их вычисления [5].

1. Вычисление собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с граничным условием третьего рода

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения: найти собственные значения λ