В области значений $x \in (0, \bar{x})$ действие $S_2(x)$ не имеет максимума, поэтому волновой функцией $\psi_2(x)$ по сравнению с $\psi_1(x)$ в сумме можно пренебречь:

$$\sum_{x=0}^{\bar{x}} \psi_1^2(x) = \sqrt{\frac{2\pi N}{a\sqrt{a^2-4}}}.$$

В последнем равенстве были использованы определения действия и предэкспоненциальной функции, $a = \alpha\frac{V_1-V_2}{T_2} > 2$. Если разложить числитель по степеням числа частиц и положить $\bar{x} = 1/2$, то

$$E_+ - E_- = T_2\sqrt{\frac{a\sqrt{a^2-4}}{2\pi N}}\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) \times \\ \times\left(1+\frac{1}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right),$$

где $\psi_1(1/2)$ определяется из (12).

Автор глубоко благодарен В.П. Маслову, Б.И. Садовникову за постановку задачи, О.Ю. Шведову, Г.В. Ковалю, А.Э. Рууге, А.В. Полякову за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. *Маслов В.П.* Задача рассеяния в квазиклассическом приближении // ДАН СССР. 1963. **151**, № 2. С. 306.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М., 2001.
3. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Shvarts A.S., Tyupkin Yu.S.* // Phys. Lett. 1975. **B59**. P. 85.
4. *t'Hooft G.* // Phys. Rev. 1976. **D14**. P. 3432.
5. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Матем. заметки. 1995. **57**, № 1. С. 133.
6. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
7. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., 1977.
8. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М., 1989.
9. *Доброхотов С.Ю., Колокольцов В.Н.* // ТМФ. 1993. **94**, № 3. С. 426.
10. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М., 1965.
11. *Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.).* Введение в квантовую статистическую механику. М., 1965.
12. *Белов В.В., Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Матем. заметки. 1993. **53**, № 5. С. 14.
13. *Боголюбов Н.Н.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. **11**, № 1. С. 77.
14. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // ТМФ. 1994. **98**, № 2. С. 266.
15. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. М., 2000.
16. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М., 1976.

Поступила в редакцию
06.12.02

УДК 517.956.224

О ЗАДАЧЕ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВНЕ РАЗРЕЗОВ НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

К. В. Прозоров, П. А. Крутицкий

(*кафедра математики*)

E-mail: kprozorov@afrodita.phys.msu.su

Изучена задача с косой производной вне разрезов на плоскости для уравнения Гельмгольца, решения которого удовлетворяют принципу максимума. Доказано существование и единственность решения. Получено интегральное представление для решения в виде потенциалов, плотность в которых определяется из однозначно разрешимой системы интегральных уравнений.

Задача с косой производной вне разрезов на плоскости для уравнения Гельмгольца, описывающего распространяющиеся волны, изучалась в работе [1], где искалось ее комплексное решение в случае чисто мнимого коэффициента при касательной производной в граничном условии. В настоящей работе эта задача рассматривается для уравнения Гельмгольца, решения которого не описывают распространяющиеся волны, а удовлетворяют принципу максимума. При этом коэффициент при касательной производной в граничном условии предполагается вещественным и ищется вещественное решение задачи. Следует отметить, что задача с косой производной для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости возникает при изучении рассеяния приливных волн на рифах [1].

В декартовых координатах $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ из класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов. Указанную совокупность кривых будем называть контуром Γ. Пусть контур Γ параметризован и в качестве параметра выступает дуговая абсцисса (длина дуги) s: $\Gamma_n = \{x:\ x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)),\ \ s \in [a_n, b_n]\}$, $n = 1, \ldots, N$. Параметризацию выберем так, чтобы для различных n отрезки $[a_n, b_n]$ на оси $0s$ не имели общих точек, в том числе и концов. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$ обозначим $\boldsymbol{\tau}_x = \{\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)\}$, а вектор нормали, совпадающий с вектором касательной при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x = \{\sin\alpha(s), -\cos\alpha(s)\}$. При выбранной параметризации $x_1'(s) = \cos\alpha(s)$, $x_2'(s) = \sin\alpha(s)$. Предположим, что плоскость $\mathbb{R}^2$ разрезана вдоль контура Γ. Через Γ^+ обозначим ту сторону контура Γ, которая остается слева при возрастании параметра s, а через Γ^- — противоположную сторону. Через X обозначим множество точек плоскости, состоящее из концов Γ: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{N} (x(a_n) \cup x(b_n))$.

Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(s)$, определенная на Γ, принадлежит банахову пространству

$$C^{\omega}_{\varkappa}(\Gamma), \quad \omega \in (0,1], \quad \varkappa \in [0,1),$$

если

$$\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s) \prod_{n=1}^{N} |[(s-a_n)(s-b_n)]^{\varkappa}| \in C^{0,\omega}(\Gamma).$$

Норма в пространстве $C^{\omega}_{\varkappa}(\Gamma)$ определяется формулой

$$\|\mathcal{F}(s)\|_{C^{\omega}_{\varkappa}(\Gamma)} = \|\mathcal{F}_0(s)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma)}.$$

Говорят, что функция $u(x) = u(x_1, x_2)$ принадлежит классу гладкости $\mathcal{K}$, если: 1) $u(x) \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma})$, т. е. $u(x)$ непрерывна вне Γ, непрерывно продолжима на Γ слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы Γ; 2) $u_{x_1}, u_{x_2} \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \setminus X)$, где X — множество концов Γ; 3) на концах разрезов функции u_{x_1}, u_{x_2} могут иметь интегрируемые особенности, т. е. при $x \to d \in X$ справедлива оценка

$$|u_{x_j}| \leqslant A|x-d|^{\delta},\ j = 1,\ 2, \tag{1}$$

где константы $\delta > -1$, $A > 0$ и $d = x(a_n)$ либо $d = x(b_n)$, $n = 1, \ldots, N$.

Сформулируем задачу с косой производной для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости.

Задача $\mathcal{U}$. Найти вещественную функцию $u(x)$ из класса $\mathcal{K}$, удовлетворяющую в $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ в классическом смысле уравнению Гельмгольца

$$\triangle u - k^2 u = 0, \quad k = \operatorname{Re} k > 0, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}\right|_{\Gamma^+} = F^+(s), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_x}\right|_{\Gamma^-} = F^-(s), \quad \beta = \operatorname{Re}\beta = \mathrm{const} \tag{3}$$

и условиям на бесконечности

$$|u(x)| = o\left(|x|^{-1/2}\right), \quad |\nabla u| = o\left(|x|^{-1/2}\right). \tag{4}$$

На концах Γ выполнение граничных условий не требуется, их заменяет неравенство (1). Задача $\mathcal{U}$ переходит в задачу Неймана [4, 6, 7] при $\beta = 0$.

Далее под $\int\limits_{\Gamma} \ldots ds$ будем понимать $\sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{a_n}^{b_n} \ldots ds$. Используя метод энергетических тождеств [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, *тогда задача* $\mathcal{U}$ *имеет не более одного решения.*

Через $K_0(z)$ обозначим функцию Макдональда нулевого порядка [2]:

$$K_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2z}}\,\mathrm{e}^{-z} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

которая является сингулярным решением уравнения (2). Будем строить решение задачи $\mathcal{U}$, предполагая, что $F^+(s)$, $F^-(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$.

Решение задачи $\mathcal{U}$ можно получить с помощью теории потенциала для уравнения (2). Ищем решение задачи $\mathcal{U}$ в виде

$$u[\mu,\nu](x) = w[\nu - \beta\mu](x) + v[\mu + \beta\nu](x), \tag{5}$$

где

$$w[\nu - \beta\mu](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} (\nu(\sigma) - \beta\mu(\sigma)) K_0(k|x - y(\sigma)|)\, d\sigma$$

— потенциал простого слоя для уравнения (2) и

$$v[\mu + \beta\nu](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} (\mu(\sigma) + \beta\nu(\sigma)) V(x,\sigma)\, d\sigma$$

— угловой потенциал [3] для уравнения (2). Плотности $\mu(s)$, $\nu(s)$ будем разыскивать в следующих банаховых пространствах: $\nu(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\mu(s) \in C^{\omega}_{q}(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$. Ядро $V(x,\sigma)$ определено на каждой дуге Γ_n $(n = 1, \ldots, N)$ формулой

$$V(x,\sigma) = \int\limits_{a_n}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} K_0(k|x - y(\xi)|)\, d\xi, \quad \sigma \in [a_n, b_n],$$

где $y = y(\xi) = (y_1(\xi), y_2(\xi))$, $|x - y(\xi)| = \sqrt{(x_1 - y_1(\xi))^2 + (x_2 - y_2(\xi))^2}$. Ниже будем полагать, что плотность углового потенциала удовлетворяет дополнительным условиям [3, 4]

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} (\mu(\sigma) + \beta\nu(\sigma))\, d\sigma = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Интегрируя $v[\nu + \beta\mu]$ по частям и используя (6), выразим угловой потенциал через потенциал двойного слоя:

$$v[\nu + \beta\mu](x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \rho(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} K_0(k|x - y(\sigma)|)\, d\sigma,$$

где $\rho(\sigma) = \int\limits_{a_n}^{\sigma} (\nu(\xi) + \beta\mu(\xi))\,d\xi$, $\sigma \in [a_n, b_n]$, $n = 1, \ldots, N$. Очевидно, что потенциалы $v[\mu + \beta\nu](x)$ и $w[\nu - \beta\mu](x)$ удовлетворяют как уравнению (2) вне Γ, так и условиям на бесконечности (4).

Заметим, что $H_0^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi}K_0(-iz)$, где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка [2]. Свойства потенциалов с ядрами, включающими функцию $H_0^{(1)}(z)$, изучены в работе [3]. Поэтому мы можем опираться на полученные там результаты. В работе [3] показано, что для плотностей $\mu(s), \nu(s)$, принадлежащих указанным выше банаховым пространствам и удовлетворяющих условиям (6), потенциалы $v[\mu + \beta\nu](x)$, $w[\nu - \beta\mu](x)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. В частности, неравенство (1) выполняется с $\varepsilon = -q$, если $q \in (0, 1)$. Более того, функция (5) принадлежит классу $\mathcal{K}$ и удовлетворяет всем условиям задачи $\mathcal{U}$, за исключением граничных условий (3).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, мы подставляем (5) в (3), используем предельные формулы для углового потенциала из [3] и получаем интегральные уравнения для плотностей $\mu(s), \nu(s)$:

$$\begin{gathered}
-\frac{1+\beta^2}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{\sin\varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|}\,d\sigma + \\
+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} (\mu(\sigma) + \beta\nu(\sigma))\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}V_0(x(s), \sigma)\,d\sigma + \\
+ \beta\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} (\mu(\sigma) + \beta\nu(\sigma))\frac{\partial}{\partial s}V(x(s), \sigma)\,d\sigma \pm \\
\pm \frac{1}{2}(1+\beta^2)\nu(s) + \\
+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} (\nu(\sigma) - \beta\mu(\sigma))\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}K_0(k|x(s) - y(\sigma)|)\,d\sigma + \\
+ \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} (\nu(\sigma) - \beta\mu(\sigma))\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s) - y(\sigma)|)\,d\sigma = F^{\pm}(s), \\
s \in \Gamma,
\end{gathered} \tag{7}$$

где $h(z) = K_0(z) + \ln(z/k)$,

$$V_0(x(s), \sigma) = \int\limits_{a_n}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}h(k|x - y(\xi)|)\,d\xi,$$
$$\sigma \in [a_n, b_n], \quad n = 1, \ldots, N.$$

Через $\varphi_0(x, y)$ обозначен угол между направлением нормали $\mathbf{n}_x$ в точке $x \in \Gamma$ и вектором с началом в x и концом в y. Угол $\varphi_0(x, y)$ считается положительным, если отсчитывается от вектора $\mathbf{n}_x$ против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от $\mathbf{n}_x$ по часовой стрелке. Кроме того, функция $\varphi_0(x, y)$ непрерывна по обеим переменным $x, y \in \Gamma$, если $x \neq y$.

Первый член в (7) — сингулярный интеграл Коши. Уравнение (7) получено при $x \to x(s) \in \Gamma^{\pm}$ и содержит два интегральных уравнения. Верхний знак соответствует интегральному уравнению на Γ^+, а нижний — на Γ^-. В добавление к уравнениям (7) мы имеем условия (6). Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\nu(s) = \frac{1}{1+\beta^2}(F^+(s) - F^-(s)). \tag{8}$$

Заметим, что $\nu(s)$ определена окончательно и принадлежит $C^{0,\lambda}(\Gamma)$.

Введем функцию $f(s)$ на Γ:

$$\begin{gathered}
f(s) = \frac{1}{2}(F^+(s) + F^-(s)) - \\
- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}K_0(k|x(s) - y(\sigma)|)\,d\sigma - \\
- \frac{\beta}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}V_0(x(s), \sigma)\,d\sigma - \\
- \frac{\beta}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s) - y(\sigma)|)\,d\sigma - \\
- \frac{\beta^2}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}V(x(s), \sigma)\,d\sigma,
\end{gathered} \tag{9}$$

где $\nu(s)$ задается выражением (8). Согласно [3, 4], $f(s)$ принадлежит $C^{0,p_0}(\Gamma)$, где $p_0 = \lambda$, если $0 < \lambda < 1$, и $p_0 = 1 - \varepsilon_0$ для любого малого $\varepsilon_0 > 0$, если $\lambda = 1$.

Складывая интегральные уравнения (7), получим сингулярное интегральное уравнение для $\mu(s)$ на Γ:

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2\pi}(1+\beta^2)\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{\sin\varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|}\,d\sigma + \\
+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}V_0(x(s), \sigma)\,d\sigma - \\
- \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}K_0(k|x(s) - y(\sigma)|)\,d\sigma - \\
- \frac{\beta^2}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}h(k|x(s) - y(\sigma)|)\,d\sigma + \\
+ \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial s}V(x(s), \sigma)\,d\sigma = f(s), \quad s \in \Gamma,
\end{gathered}$$

где $f(s)$ определена в (9); $V_0(x, \sigma)$, $h(z)$ введены в (7) и $V(x, \sigma)$ — ядро углового потенциала.

Как показано в работе [3],

$$\frac{\sin\varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \in C^{0,\lambda}(\Gamma \times \Gamma).$$

Следовательно, полученное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma)Y(s, \sigma)d\sigma = \\
= -\frac{2}{1+\beta^2}f(s), \quad s \in \Gamma,
\end{gathered} \tag{10}$$

где $f(s)$ определена в (9) и

$$Y(s,\sigma) = \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin\varphi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \right) - \right.$$
$$- \frac{1}{1+\beta^2}\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} V_0(x(s),\sigma) + \right.$$
$$+ \beta \tfrac{\partial}{\partial s} V(x(s),\sigma) - \beta \tfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} K_0(k|x(s)-y(\sigma)|) -$$
$$\left.\left. - \beta^2 \tfrac{\partial}{\partial s} h(k|x(s)-y(\sigma)|) \right] \right\}.$$

Функции $V_0(x,\sigma)$ и $h(z)$ введены в (7) и $V(x,\sigma)$ — ядро углового потенциала. Из работ [3, 4] следует, что $Y(s,\sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma \times \Gamma)$, $p_0 = \lambda$, если $0 < \lambda < 1$, и $p_0 = 1 - \varepsilon_0$ для любого малого $\varepsilon_0 > 0$, если $\lambda = 1$. Вследствие (8) условия (6) принимают форму

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} \mu(\sigma)d\sigma = -\frac{\beta}{1+\beta^2} \int\limits_{a_n}^{b_n} (F^+(\sigma) - F^-(\sigma))d\sigma, \quad (11)$$
$$n = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, если $\mu(s)$ — решение уравнений (10), (11) из пространства $C_q^\omega(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, то потенциал (5) удовлетворяет всем требованиям задачи $\mathcal{U}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $F^\pm(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$. *Если уравнения* (10), (11) *имеют решение* $\mu(s)$ *из банахова пространства* $C_q^\omega(\Gamma)$ *с* $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, *тогда решение задачи* $\mathcal{U}$ *дается формулой* (5), *где* $\nu(s)$ *определяется выражением* (8).

Система (10), (11) является частным случаем систем, изученных в [5]. По теореме 1 из [5] система (10), (11) фредгольмова, т. е. для нее справедлива альтернатива Фредгольма. Докажем, что система (10), (11) однозначно разрешима. Для этого достаточно доказать, что однородная система имеет только тривиальное решение.

Пусть $\mu^0(s)$ — произвольное решение однородной системы (10), (11) в пространстве $C_q^\omega(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$. На основании теоремы 2 $u[\mu^0,0](x)$ — решение однородной задачи $\mathcal{U}$. Используя теорему 1, получаем $u[\mu^0,0](x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Из предельных формул для касательных и нормальных производных потенциалов [3] получаем

$$\lim_{x \to x(s) \in \Gamma^+} \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} u[\mu^0,0](x) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} u[\mu^0,0](x) \right\} -$$
$$- \lim_{x \to x(s) \in \Gamma^-} \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} u[\mu^0,0](x) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_x} u[\mu^0,0](x) \right\} =$$
$$= -(1+\beta^2)\mu^0(s) \equiv 0, \quad s \in \Gamma.$$

Следовательно, $\mu^0(s) \equiv 0$. Из следствия 1 работы [5] вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$. *Неоднородная система* (10), (11) *имеет единственное решение* $\mu(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma)$, $p = \min\{\lambda, 1/2\}$, *для любой функции* $f(s) \in C^{0,p_0}(\Gamma)$, *где* $p_0 = \lambda$, *если* $0 < \lambda < 1$, *и* $p_0 = 1 - \varepsilon_0$ *для любого малого* $\varepsilon_0 > 0$, *если* $\lambda = 1$.

Функция $f(s)$ из (9) обладает требуемой в теореме 3 гладкостью, если $F^\pm(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$. Из теорем 2, 3 вытекает следующее.

Теорема 4. *Если* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $F^\pm(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$, *тогда решение задачи* $\mathcal{U}$ *существует и дается выражением* (5), *где* $\nu(s)$ *определяется в* (8), *а* $\mu(s)$ — *решение системы* (10), (11) *из* $C_{1/2}^p(\Gamma)$ *с* $p = \min\{1/2, \lambda\}$, *которое гарантируется теоремой 3.*

Теорема 4 устанавливает существование классического решения задачи $\mathcal{U}$ при $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $F^\pm(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение задачи $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию (1) с $\varepsilon = -1/2$. Явные выражения для особенностей градиента решения на концах разрезов Γ можно получить с помощью формул из [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-01067).

Литература

1. *Krutitskii P.A.* // Rend. Matem. (Roma). 1999. **19**, Serie VII. P. 367.
2. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
3. *Крутицкий П.А.* // ЖВМиМФ. 1994. **34**, № 8—9. С. 1237.
4. *Крутицкий П.А.* // ЖВМиМФ. 1994. **34**, № 11. С. 1652.
5. *Крутицкий П.А.* // Докл. РАН. 2001. **376**, № 1. С. 17.
6. *Крутицкий П.А.* // ЖВМиМФ. 1996. **36**, № 8. С. 127.
7. *Крутицкий П.А.* // Дифф. уравнения. 1996. **32**, № 9. С. 1202.

Поступила в редакцию
15.01.03