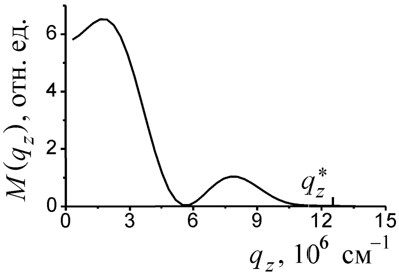
$$-\frac{\mathrm{e}^{i2\delta_2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{i(q_z+2\varkappa_2)a_2}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{(q_z+2\varkappa_2)a_2}{2}\right)}{\frac{(q_z+2\varkappa_2)a_2}{2}}- \\ -\frac{\mathrm{e}^{-i2\delta_2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{i(q_z-2\varkappa_2)a_2}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{(q_z-2\varkappa_2)a_2}{2}\right)}{\frac{(q_z-2\varkappa_2)a_2}{2}}\Bigg]\Bigg|^2, \tag{14}$$

где $\varkappa_j$, δ_j, B_j — коэффициенты, определяющие значение волновой функции в j-й квантовой яме $\chi_j(z)=B_j\sin(\varkappa_j z+\delta_j)$, a_j — ширина j-й квантовой ямы, b — ширина барьера, α_j — параметры, определяющие гибридизацию волновых функций $\phi_1(z)=\chi_1(z)+\alpha_2\chi_2(z)$ и $\phi_2(z)=\chi_2(z)+\alpha_1\chi_1(z)$ [9]. Зависимость квадрата модуля матричного элемента $M(q_z)$ от q_z изображена на рисунке. Как видно из рисунка и из формулы (14), величина $M(q_z)$ существенно отлична от нуля в области $q_z\leqslant q_z^*$, где $q_z^*\approx 2\pi/a$ и $a=(a_1+a_2)/2$. Соответственно основной вклад в (13) дает область $u\in[f_0,u^*]$, где $u^*=\frac{\hbar s}{kT}q_z^*\approx\frac{\hbar s 2\pi}{kTa}$. Соответственно выражение (13)



Зависимость квадрата модуля матричного элемента от q_z при $m=0.07m_0$ (m_0 — масса свободного электрона), $a_1=7$ нм, $a_2=5.9$ нм и $b=4$ нм

принимает вид

$$\Gamma_{\mathrm{ph}}^{(12)}\approx\frac{c(T)}{\sqrt{\gamma}}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\int\limits_{f_0}^{u^*}du\frac{u\,\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u-1}\left|\left\langle\phi_2(z)\left|\mathrm{e}^{iq_z z}\right|\phi_1(z)\right\rangle\right|^2. \tag{15}$$

Отметим, что $u=\hbar\omega/kT$, и область интегрирования соответствует области энергий акустических фононов $\sqrt{2ms^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}<\hbar\omega<kT_0$.

Литература

1. *Chomette A., Deveaud B., Regreny A., Bastard G.* // Phys. Rev. Lett. 1986. **57**, No. 12. P. 1464.
2. *Richter G., Stolz W., Thomas P.* et. al. // Superlattices and Microstructures. 1997. **22**, No. 4. P. 475.
3. *Zvyagin I.P., Ormont M.A., Borisov K.E.* // Nanotechnology. 2000. **11**. P. 375.
4. *Ferreira R., Bastard G.* // Phys. Rev. 1989. **B40**, No. 2. P. 1074.
5. *Волков Р.А., Чуйко А.Ф.* // Изв. вузов, Физика. 1989. **9**. С. 87.
6. *Juang C.* // Phys. Rev. 1991. **B44**, No. 19. P. 10706.
7. *Wang Lin-Wang, Zunger A., Mäder K.A.* // Phys. Rev. 1996. **B53**, No. 4. P. 2010.
8. *Мотт Н., Дэвис Э.* Электронные процессы в некристаллических веществах. М., 1982.
9. *Ridley B.K.* // J. Phys. C: Solid St. Phys. 1982. **15**. P. 5899.

Поступила в редакцию
14.02.03

АСТРОНОМИЯ

УДК 530.12:517.958

УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВАЙДЬЯ

В. И. Григорьев, И. П. Денисова

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Решена задача о движении частиц в пространстве Вайдья, описывающем гравитационное поле звезд, излучающих сферически-симметрично безмассовые частицы. Найдены законы нерадиального движения массивных и безмассовых частиц в таком поле. Задача решена в параметрическом виде.

Одним из наиболее распространенных способов анализа точных решений уравнений Эйнштейна и выявления свойственных им гравитационных эффектов является, как известно, изучение геодезического движения, т. е. свободного движения частиц в пространстве-времени, задаваемом этим точным решением. Поэтому после открытия каждого нового точного решения уравнений ОТО обычно предпринимались достаточно энергичные усилия по интегрированию нелинейных уравнений, описывающих геодезическое движение.

В результате промежуток времени между открытием точного решения уравнений Эйнштейна и завершением анализа геодезического движения был, как правило, достаточно коротким. Это можно заметить, если проанализировать основные точные решения. Так, например, решение Шварцшильда, описывающее метрику, создаваемую статическим сферически-симметричным массивным источником, было найдено в 1916 г., и уже в том же году Эйнштейн провел расчеты геодезических в постньютоновском приближении и предсказал свои знаменитые гравитационные эффекты. В случае решения Керра, описывающего гравитационное поле вращающегося источника, промежуток времени между установлением явного вида метрики и аналитическим исследованием геодезических занял пять лет.

Однако в ОТО существует немало точных решений, геодезические которых не удалось исследовать до настоящего времени. Одним из таких решений является метрика Вайдья [1], найденная еще в 1949 г. Эта метрика описывает гравитационное поле вне сферической звезды, которая излучает сферически-симметрично безмассовые частицы. В настоящее время в качестве такого излучения обычно рассматривают электромагнитное и нейтринное излучения звезд как в обычном («спокойном») состоянии, так и при взрывах Сверхновых.

Как известно [1], согласно уравнениям Эйнштейна, интервал для пространства Вайдья имеет вид

$$ds^2 = (1 - \frac{2M(w)}{r})dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

где используется система единиц, в которой $G = c = 1$.

Масса звезды $M(w)$, входящая в это выражение, в отличие от метрики Шварцшильда, зависит от запаздывающего времени w Эддингтона–Финкельштейна [2] и эта зависимость предопределяется законом излучения звезды: $dM(w)/dw = -f(w)$, где $f(w)$ — количество энергии, излучаемое звездой по всем направлениям в единицу времени.

Как уже отмечалось, геодезические пространства Вайдья до сих пор не исследованы, хотя такие попытки и предпринимались [3]. Основной сложностью на этом пути является полная неопределенность в зависимости функции $M = M(w)$. Так как звезды с течением времени проходят различные стадии эволюции: от взрывов Сверхновых, когда их излучение экстремально велико, до медленно угасающих белых карликов, нейтронных звезд и черных дыр, то функция $M = M(w)$ имеет качественно различный вид на разных этапах эволюции звезды.

Так как масса излучающей звезды изменяется с течением времени, то движение точечных частиц в гравитационном поле этой звезды будет происходить иначе, чем в гравитационном поле Шварцшильда. Для выяснения характерных черт такого движения нам необходимо найти решение уравнений геодезических в метрике Вайдья. Построим сначала уравнения движения массивной точечной частицы. Так как метрика (1) является центрально-симметричной, то движение будет плоским [4]. Полагая, что эта плоскость совпадает с плоскостью $\theta = \pi/2$, будем иметь

$$\frac{du^0}{ds} + r(u^\varphi)^2 - \frac{M}{r^2}(u^0)^2 = 0, \quad \frac{du^\varphi}{ds} + \frac{2}{r}u^r u^\varphi = 0, \tag{2}$$
$$\frac{du^r}{ds} + \left[\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{\dot{M}}{r}\right](u^0)^2 + \frac{2M}{r^2}u^0u^r + {} + (2M - r)(u^\varphi)^2 = 0,$$

где точка означает дифференцирование по времени w.

Эта система уравнений имеет два первых интеграла. Действительно, поскольку метрика (1) не зависит от угла φ, то компонента u_φ четырехвектора скорости массивной частицы должна быть постоянной величиной: $u_\varphi = \alpha = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что

$$u^\varphi = \frac{d\varphi}{ds} = g^{\varphi\varphi}u_\varphi = -\frac{\alpha}{r^2}. \tag{3}$$

Другой интеграл системы (2) можно получить, если учесть, что квадрат четырехвектора любой массивной частицы должен быть равен единице: $u^iu^kg_{ik} = 1$. В результате получим

$$(u^0)^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + 2u^0u^r = 1 + \frac{\alpha^2}{r^2}. \tag{4}$$

Таким образом, из двух оставшихся уравнений (2) одно в силу соотношения (4) будет следствием другого. Приведем независимое уравнение к наиболее простому виду. Для этого радиальную компоненту четырехвектора скорости представим в виде

$$u^r = E - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)u^0, \tag{5}$$

где E — некоторая новая неизвестная функция, имеющая смысл энергии частицы, приходящейся на единицу массы.

Подставляя соотношение (5) в третье уравнение системы (2) и используя первое уравнение, будем иметь

$$dE = -\frac{u^0}{r}dM. \tag{6}$$

Отсюда непосредственно следует, что энергия частицы увеличивается ($dE > 0$), если звезда теряет массу на излучение ($dM < 0$), и уменьшается ($dE < 0$), если происходит поглощение звездой излучения, пришедшего с пространственной бесконечности ($dM > 0$).

Подставляя соотношение (5) в выражение (4), несложно получить

$$u^0 = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \qquad u^r = \mp\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)}. \tag{7}$$

Так как при движении к тяготеющему центру $u^r < 0$, то верхний знак в этих выражениях соответствует движению к источнику, а нижний знак — от источника.

Таким образом, для нахождения законов движения массивной частицы в гравитационном поле излучающей звезды нам необходимо проинтегрировать систему уравнений (6) и (7) с учетом выражения (3). Входящая в выражения (6) и (7) функция $M = M(w)$ зависит от закона излучения энергии звездой. Этот закон определяется интенсивностью термоядерных реакций в звезде, типом звезды, ее массой и размерами, степенью прозрачности вещества звезды для уходящего излучения, видом излучения (нейтринное или электромагнитное) и многими другими факторами. Вполне очевидно, что осуществить прямолинейное интегрирование уравнений (3), (6), (7) и найти явную зависимость $r = r(w)$, $\varphi = \varphi(w)$ и $s = s(w)$ при произвольном законе изменения массы звезды $M = M(w)$ невозможно.

В работе [5] для интегрирования уравнений радиального движения частиц в метрике Вайдья был использован параметрический метод. Поэтому и в нашей более сложной задаче нерадиального движения будем искать решение уравнений (3), (6) и (7) в параметрическом виде:

$$r = r(\xi), \quad \varphi = \varphi(\xi), \quad w = w(\xi), \quad s = s(\xi), \quad E = E(\xi),$$

где ξ — некоторый параметр.

Выбор этого параметра произведем так, чтобы уравнения (3), (6) и (7) интегрировались и давали достаточно удобные для дальнейших исследований выражения. Для этого будем считать, что поток энергии источника, который определяется термоядерными процессами, протекающими внутри звезды, может быть задан не только как функция переменной $w = w(\xi)$, но и как явная функция параметра ξ. Тогда массу звезды мы можем считать некоторой заданной функцией $M = M(\xi)$ того же параметра ξ.

Введем параметр ξ в соответствии с соотношением $\xi = r/u^0$. Тогда уравнение (6) можно привести к виду

$$d\Big(E + \frac{M}{\xi}\Big) = -\frac{M}{\xi^2} d\xi.$$

Так как $M = M(\xi)$ предполагается заданной функцией параметра ξ, то это уравнение можно проинтегрировать:

$$E(\xi) = -\frac{M(\xi)}{\xi} - \int \frac{M(\xi)}{\xi^2} d\xi. \tag{8}$$

Используя первое из соотношений (7), из определения $\xi = r/u^0$ несложно получить уравнение, связывающее r и ξ:

$$r^4 - 2r^3(M + \xi E) + r^2\xi^2 + \alpha^2\xi^2 = 0. \tag{9}$$

Решая это алгебраическое уравнение, найдем зависимость $r = r(\xi)$. Кроме того, из уравнения (9) следует, что

$$\frac{dr}{d\xi}(\xi) = \frac{r^3(\xi)E(\xi) - \xi r^2(\xi) - \alpha^2\xi}{\{2r^3(\xi) - 3[M(\xi) + \xi E(\xi)]r^2(\xi) + \xi^2 r(\xi)\}}.$$

Разделив уравнение (3) на последнее соотношение (7), найдем

$$\varphi = \varphi_0 \pm \\ \pm \int \frac{\alpha d\xi}{r^2(\xi)\sqrt{E^2(\xi) - \left(1 - \frac{2M(\xi)}{r(\xi)}\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2(\xi)}\right)}} \frac{dr}{d\xi}(\xi). \tag{10}$$

Совершенно аналогично можно получить

$$w = w_0 \mp \int \frac{r(\xi) d\xi}{\xi\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)}} \frac{dr}{d\xi}(\xi), \tag{11}$$

$$s = s_0 \mp \int \frac{d\xi}{\sqrt{E^2(\xi) - \left(1 - \frac{2M(\xi)}{r(\xi)}\right)\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2(\xi)}\right)}} \frac{dr}{d\xi}(\xi).$$

Таким образом, при заданном законе излучения звезды $M = M(\xi)$ соотношения (8)–(11) представляют собой решение уравнения для времениподобной геодезической, записанное в параметрическом виде.

Уравнения геодезических для безмассовой частицы могут быть получены аналогично, если во всех соотношениях дифференцировать не по интервалу ds, а по некоторому аффинному параметру $d\sigma$ и учесть, что для безмассовой частицы $ds = 0$. В результате получим

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \frac{dr}{d\sigma} = \mp\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\alpha^2}{r^2}}, \tag{12}$$

$$\frac{dw}{d\sigma} = \frac{Er \pm \sqrt{E^2r^2 - \alpha^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}{(r - 2M)},$$

где $E = E(\xi)$ определяется выражением (8), а уравнение, связывающее r и ξ, в этом случае имеет вид

$$r^4 - 2r^3(M + \xi E) + \alpha^2\xi^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dr}{d\xi}(\xi) = \frac{r^3(\xi)E(\xi) - \alpha^2\xi}{\{2r^3(\xi) - 3r^2(\xi)[M(\xi) + \xi E(\xi)]\}}.$$

Интегрируя уравнения (12) с учетом этого соотношения, найдем

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{\alpha d\xi}{r(\xi)\sqrt{E^2(\xi)r^2(\xi) - \alpha^2\left(1 - \frac{2M(\xi)}{r(\xi)}\right)}} \frac{dr}{d\xi}(\xi),$$

$$w = w_0 \mp \int \frac{r^2(\xi) d\xi}{\xi\sqrt{E^2r^2(\xi) - \alpha^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} \frac{dr}{d\xi}(\xi).$$

Таким образом, параметрический метод позволяет исследовать движение и безмассовых частиц в метрике Вайдья.

Полученные нами законы движения частиц в этой метрике могут использоваться при интерпретации данных, получаемых во время наблюдения вспышек Сверхновых. По нашему мнению, эти результаты будут полезны для анализа событий [6], наблюдавшихся при вспышке Сверхновой SN1987A, когда гравитационно-волновые детекторы в Риме (Италия), Мэриленде (США) и сейсмодатчики в Москве согласованно зарегистрировали какое-то импульсное воздействие примерно за одну секунду до прохождения нейтринного импульса от взрыва Сверхновой SN1987A, также зарегистрированного на Земле несколькими подземными нейтринными станциями.

Литература

1. *Vaidya P.C.* // Proc. Indian Acad. Sci. 1949. **33**. P. 264.
2. *Chandrasekhar S.* The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford, 1983.
3. *Lindquist R.W., Schwartz R.A., Misner C.W.* // Phys. Rev. 1965. **B137**. P. 1364.
4. *Денисов В.И.* // ТМФ. 1997. **112**, №2. С. 337.
5. *Denisova I.P., Zubrilo A.A.* // Gravitation and Cosmology. 2000. **6**, №3. P. 251.
6. *Имшенник В.С., Надежин Д.К.* // УФН. 1988. **156**, №4. С. 561.

Поступила в редакцию
03.07.02

УДК 521.93

ОБ УЧЕТЕ ТРЕХОСНОСТИ В ТЕОРИИ НУТАЦИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЙ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(*ГАИШ*)

E-mail: pasynok@sai.msu.ru

Для быстровращающегося слабо сжатого трехосного твердого тела (Земли) сформулированы и решены приближенные уравнения вращения. Полученное решение очень компактное и имеет высокую точность. Наличие быстрого вращения дает возможность свести задачу о нахождении экваториальных компонент угловой скорости вращения тела с малым вторым сжатием к задаче о вращении двухосного тела с измененным значением динамического сжатия.

Введение

Вращение трехосного абсолютно твердого тела в общем случае является сложной задачей. Поэтому ее решение ищется в виде рядов по малому параметру, равному отношению второго сжатия к первому [1, 2]. Недавно С.М. Молоденским было получено решение этой задачи с точностью до членов четвертого порядка малости по этому параметру [3].

Оказывается, что в случае быстровращающегося твердого тела возможны дополнительные упрощения, рассмотрению которых и посвящена настоящая работа.

Вывод приближенных уравнений для абсолютно твердого тела с быстрым вращением

Будем полагать, что твердое тело (Земля) является близким к эллипсоиду вращения, но в остальном имеет произвольную структуру. Тогда, согласно известным данным из теоретической механики, существует система координат (СК) (система главных осей тензора инерции) с началом в центре масс всей Земли, в которой тензор инерции всей Земли диагонален. Пронумеруем оси этой системы координат таким образом, чтобы ось OZ соответствовала максимальному значению момента инерции C всей Земли; ось OX соответствовала минимальному моменту инерции A; а ось OY соответствовала промежуточному значению момента инерции B. В этой СК динамические уравнения Эйлера (уравнения моментов) имеют вид

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + (C-B)\,\omega_2\omega_3 &= \Gamma_1,\\ B\frac{d\omega_2}{dt} + (A-C)\,\omega_3\omega_1 &= \Gamma_2,\\ C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\,\omega_1\omega_2 &= \Gamma_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где ω_k, Γ_k $(k=1,2,3)$ — компоненты угловой скорости и момента сил соответственно.

Умножим первое уравнение на $\sqrt{\frac{1}{A(C-B)}}$, а второе — на $i\sqrt{\frac{1}{B(C-A)}}$ и сложим. Здесь i обозначает комплексную единицу. Тогда получится система динамических уравнений Эйлера в комплексном виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\widetilde{\omega}'}{dt} - i\sqrt{\frac{(C-A)}{B}\frac{(C-B)}{A}}\,\widetilde{\omega}'\omega_3 = \widetilde{\Gamma}',\\ &C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\,\omega_2\omega_1 = \Gamma_3, \end{aligned} \tag{2}$$