Полученные нами законы движения частиц в этой метрике могут использоваться при интерпретации данных, получаемых во время наблюдения вспышек Сверхновых. По нашему мнению, эти результаты будут полезны для анализа событий [6], наблюдавшихся при вспышке Сверхновой SN1987A, когда гравитационно-волновые детекторы в Риме (Италия), Мэриленде (США) и сейсмодатчики в Москве согласованно зарегистрировали какое-то импульсное воздействие примерно за одну секунду до прохождения нейтринного импульса от взрыва Сверхновой SN1987A, также зарегистрированного на Земле несколькими подземными нейтринными станциями.

Литература

1. *Vaidya P.C.* // Proc. Indian Acad. Sci. 1949. **33**. P. 264.
2. *Chandrasekhar S.* The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford, 1983.
3. *Lindquist R.W., Schwartz R.A., Misner C.W.* // Phys. Rev. 1965. **B137**. P. 1364.
4. *Денисов В.И.* // ТМФ. 1997. **112**, №2. С. 337.
5. *Denisova I.P., Zubrilo A.A.* // Gravitation and Cosmology. 2000. **6**, №3. P. 251.
6. *Имшенник В.С., Надежин Д.К.* // УФН. 1988. **156**, №4. С. 561.

Поступила в редакцию
03.07.02

УДК 521.93

ОБ УЧЕТЕ ТРЕХОСНОСТИ В ТЕОРИИ НУТАЦИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЙ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(*ГАИШ*)

E-mail: pasynok@sai.msu.ru

Для быстровращающегося слабо сжатого трехосного твердого тела (Земли) сформулированы и решены приближенные уравнения вращения. Полученное решение очень компактное и имеет высокую точность. Наличие быстрого вращения дает возможность свести задачу о нахождении экваториальных компонент угловой скорости вращения тела с малым вторым сжатием к задаче о вращении двухосного тела с измененным значением динамического сжатия.

Введение

Вращение трехосного абсолютно твердого тела в общем случае является сложной задачей. Поэтому ее решение ищется в виде рядов по малому параметру, равному отношению второго сжатия к первому [1, 2]. Недавно С.М. Молоденским было получено решение этой задачи с точностью до членов четвертого порядка малости по этому параметру [3].

Оказывается, что в случае быстровращающегося твердого тела возможны дополнительные упрощения, рассмотрению которых и посвящена настоящая работа.

Вывод приближенных уравнений для абсолютно твердого тела с быстрым вращением

Будем полагать, что твердое тело (Земля) является близким к эллипсоиду вращения, но в остальном имеет произвольную структуру. Тогда, согласно известным данным из теоретической механики, существует система координат (СК) (система главных осей тензора инерции) с началом в центре масс всей Земли, в которой тензор инерции всей Земли диагонален. Пронумеруем оси этой системы координат таким образом, чтобы ось OZ соответствовала максимальному значению момента инерции C всей Земли; ось OX соответствовала минимальному моменту инерции A; а ось OY соответствовала промежуточному значению момента инерции B. В этой СК динамические уравнения Эйлера (уравнения моментов) имеют вид

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + (C-B)\,\omega_2\omega_3 &= \Gamma_1, \\ B\frac{d\omega_2}{dt} + (A-C)\,\omega_3\omega_1 &= \Gamma_2, \\ C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\,\omega_1\omega_2 &= \Gamma_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где ω_k, Γ_k $(k=1,2,3)$ — компоненты угловой скорости и момента сил соответственно.

Умножим первое уравнение на $\sqrt{\frac{1}{A(C-B)}}$, а второе — на $i\sqrt{\frac{1}{B(C-A)}}$ и сложим. Здесь i обозначает комплексную единицу. Тогда получится система динамических уравнений Эйлера в комплексном виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\widetilde{\omega}'}{dt} - i\sqrt{\frac{(C-A)}{B}\frac{(C-B)}{A}}\,\widetilde{\omega}'\omega_3 = \widetilde{\Gamma}', \\ &C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\,\omega_2\omega_1 = \Gamma_3, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\widetilde{\omega}' = \sqrt{\frac{A}{C-B}}\omega_1 + i\sqrt{\frac{B}{C-A}}\omega_2$, $\widetilde{\Gamma}' = \sqrt{\frac{1}{A(C-B)}}\Gamma_1 + i\sqrt{\frac{1}{B(C-A)}}\Gamma_2$.

Определим вектор безразмерной угловой скорости $\mathbf{m}$ соотношением

$$\omega = \Omega_0 \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1+m_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где Ω_0 — средняя угловая скорость вращения тела (Земли). Пока мы не полагаем величины $\mathbf{m}$ малыми.

Подставляя выражение (3) в (2), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Omega_0}\frac{d\widetilde{m}'}{dt} - i\sqrt{\frac{(C-A)}{B}\frac{(C-B)}{A}}\,\widetilde{m}'(1+m_3) = \frac{\widetilde{\Gamma}'}{\Omega_0^2}, \\ &\frac{1}{\Omega_0}\frac{dm_3}{dt} + \frac{(B-A)}{C}m_2 m_1 = \frac{\Gamma_3}{C\Omega_0^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\widetilde{m}' = \sqrt{\frac{A}{C-B}}m_1 + i\sqrt{\frac{B}{C-A}}m_2$.

Подчеркнем, что уравнения (4) являются точными уравнениями для твердого тела (Земли). Теперь допустим, что тело (Земля) быстро вращается. Тогда величина m мала ($m \sim 10^{-8}$ для Земли). В этом случае квадратичными по m величинами можно с высокой точностью пренебречь. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Omega_0}\frac{d\widetilde{m}'}{dt} - i\sqrt{\frac{(C-A)}{B}\frac{(C-B)}{A}}\,\widetilde{m}' = \frac{\widetilde{\Gamma}'}{\Omega_0^2}, \\ &\frac{1}{\Omega_0}\frac{dm_3}{dt} = \frac{\Gamma_3}{C\Omega_0^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Собственные частоты вращения абсолютно твердой Земли

Собственные частоты вращения абсолютно твердой Земли получаются из уравнений (5), когда отсутствуют внешние силы. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Omega_0}\frac{d\widetilde{m}'}{dt} - i\sqrt{\frac{(C-A)}{B}\frac{(C-B)}{A}}\,\widetilde{m}' = 0, \\ &\frac{1}{\Omega_0}\frac{dm_3}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда для Фурье-амплитуды вектора $\mathbf{m}$ получим

$$\begin{aligned} &(\sigma - \sigma_E)\widetilde{m}' = 0, \\ &\sigma m_3 = 0, \\ &\sigma_E \equiv \sqrt{\frac{(C-A)}{B}\frac{(C-B)}{A}}, \end{aligned} \tag{7}$$

где σ – частота Фурье-амплитуды, деленная на Ω_0. Безразмерные собственные частоты и собственные векторы равны:

1) частота $\sigma = 0$, соответствующий собственный вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ m_3(0) \end{pmatrix}$;

2) частота $\sigma = \sigma_E$, соответствующий собственный вектор $\begin{pmatrix} \widetilde{m}'(\sigma_E)e^{i\Omega_0\sigma_E t} \\ 0 \end{pmatrix}$. $m_3(0)$ и $\widetilde{m}'(\sigma_E)$ — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Постоянная добавка к угловой скорости вращения $m_3(0) = 0$ по определению Ω_0.

Вынужденное вращение абсолютно твердой Земли

Для рассмотрения вынужденного вращения необходимо вычислить компоненты моментов сил, действующих на тело. Поэтому будем рассматривать вращение абсолютно твердой Земли под действием приливных сил.

Вначале вычислим момент внешних сил, действующих на абсолютно твердую Землю. Как известно, например, из [4], силовая функция приливных сил, действующих со стороны Солнца, Луны и планет, равна

$$W = \sum_{(i)} \frac{GM_{(i)}}{R_{(i)}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R_{(i)}}\right)^n P_n\left(\cos\psi_{(i)}\right), \tag{8}$$

где $M_{(i)}$ — масса i-го возмущающего тела; $R_{(i)}$ — расстояние между центром масс Земли и центром масс возмущающего тела; r — модуль радиус-вектора точки, в которой вычисляется значение силовой функции; $\psi_{(i)}$ — угол между направлениями из центра масс Земли на точку, в которой вычисляется значение силовой функции и i-е возмущающее тело. Напомним также, что силовая функция равна гравитационному потенциалу со знаком минус.

Если ограничиться только квадрупольной частью, то для приливной силовой функции имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} W = \Omega_0^2\Big\{ &W_{20}^{(c)}\left(z^2 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) + \\ &+ 3\left(W_{21}^{(c)}xz + W_{21}^{(s)}yz\right) + \\ &+ 3\left(W_{22}^{(c)}\left(x^2-y^2\right) + 2W_{22}^{(s)}xy\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $W_{2m}^{(c)}$ и $W_{2m}^{(s)}$ — безразмерные коэффициенты разложения приливной силовой функции в ряд по сферическим функциям.

Подставим силовую функцию (9) в определение момента импульса внешних сил:

$$\overline{\Gamma} = \int_V \rho\left(\overline{x}\right)\overline{x}\otimes\nabla W\, dV. \tag{10}$$

При интегрировании нужно учесть, что наша система координат является системой главных осей тензора инерции с началом в центре масс всей

Земли. Проинтегрировав (10), получим следующее выражение:

$$\overline{\Gamma} = \Omega_0^2 \begin{pmatrix} 3W_{21}^{(s)}\,(C-B) \\ -3W_{21}^{(c)}\,(C-A) \\ 6W_{22}^{(s)}\,(B-A) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Обозначим: $\varphi_1 = 3W_{21}^{(c)}$, $\varphi_2 = 3W_{21}^{(s)}$, как это принято в современных публикациях по нутации Земли, например в [5], и подставим (11) в уравнения (5). Затем, решая уравнения (5) относительно Фурье-амплитуд вектора $\mathbf{m}$ и вспоминая определение: $\widetilde{m}' = \sqrt{\frac{A}{C-B}}m_1 + i\sqrt{\frac{B}{C-A}}m_2$, получим

$$\begin{aligned} \widetilde{m} &= -\frac{\sigma_E}{\sigma-\sigma_E}\,(\varphi_1 + i\varphi_2) = -\frac{\sigma_E}{\sigma-\sigma_E}\widetilde{\varphi}, \\ m_3 &= 6\frac{(B-A)}{C}\frac{W_{22}^{(s)}}{i\sigma}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\widetilde{m} \equiv m_1 + im_2$, $\widetilde{\varphi} \equiv \varphi_1 + i\varphi_2$. Но первое из соотношений (12) как раз и есть решение задачи о нахождении экваториальных компонент угловой скорости вращения для двухосного абсолютно твердого тела, но с измененным значением динамического сжатия, равным σ_E. Это позволяет учитывать трехосность Земли в задаче о нутации абсолютно твердой Земли чрезвычайно простым образом — заменой динамического сжатия на эффективное динамической сжатие σ_E.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 01-02-16529 и 02-05-39004).

Литература

1. *Молоденский С.М.* Приливы, нутация и внутреннее строение Земли. М., 1980.
2. *Zharkov V.N., Molodensky S.M., Groten E.* et al. The Earth and its rotation. Low-frequency geodynamics. Heidelberg, 1996.
3. *Молоденский С.М.* Об эффектах трехосности эллипсоида инерции в теории нутации // Российский журнал наук о Земле. 1998. **1**, №1, С. 53.
4. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев, 1992.
5. *Mathews P.M., Buffet B.A., Herring T.A., Shapiro I.I.* // J. Geophys. Res. 1991. **96**. P. 8219.

Поступила в редакцию
21.10.02