ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145; 530.12:531.51

КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА КЛАССИЧЕСКОМ ФОНЕ

О. Д. Тимофеевская, О. А. Хрусталев, М. В. Чичикина

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

E-mail: chich@goa.bog.msu.ru

Мы продолжаем рассмотрение гравитационного поля в терминах переменных Боголюбова, определенных в работе [1]. Задачей настоящей статьи является построение регулярной теории возмущений и получение условий ее применимости.

Вторичное квантование

Определим операторы

$$\hat{q}_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_{st}(x) + i\frac{\delta}{\delta f_n^{st}(x)}\right),$$
$$\hat{p}^{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_n^{st}(x) - i\frac{\delta}{\delta f_{st}(x)}\right) \tag{1}$$

в пространстве L функционалов F со скалярным произведением

$$\langle F_1|F_2\rangle = \int Df_{st}Df_n^{st}F_{1n}[f_{st},f_n^{st}]F_2[f_{st},f_n^{st}].$$

Эти операторы (1) самосопряжены и удовлетворяют формальному коммутационному соотношению

$$[\hat{q}_{st}(x), \hat{p}^{st}(x')] = i\delta(x-x'),$$

поэтому они могут быть истолкованы как операторы координаты и импульса осцилляторов поля и использованы для процедуры вторичного квантования. Однако непосредственное их использование приводит к удвоению числа возможных состояний поля, поскольку существует еще одна пара самосопряженных операторов:

$$\tilde{q}_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_{st}(x) - i\frac{\delta}{\delta f_n^{st}(x)}\right),$$
$$\tilde{p}^{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_n^{st}(x) + i\frac{\delta}{\delta f_{st}(x)}\right),$$

которые удовлетворяют тому же коммутационному соотношению и коммутируют с $\hat{q}(x)$ и $\hat{p}(x)$.

Операторы $\tilde{p}(x)$ и $\tilde{q}$ также могут быть соотнесены с операторами координаты и импульса, которые определены в Фоковском пространстве, ортогональном описанному выше. Поэтому схема квантования с использованием операторов (1) требует редукции числа состояний. Одним из возможных способов редукции может быть, например, голоморфное представление.

Мы можем рассматривать пространство функционалов $F[z_{st}, z^{st*}]$, изоморфное пространству $F[f_{st}, f_n^{st}]$. Если определить

$$z_{st}(x) = f_{st}(x) + if_n^{st}(x), \quad z^{st*}(x) = f_{st}(x) - if_n^{st}(x),$$

то $\hat{q}_{st}(x)$ и $\hat{p}^{st}(x)$ можно определить как операторы:

$$\hat{q}_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z_{st}(x) - \frac{\delta}{\delta z^{st*}(x)}\right),$$

$$\hat{p}^{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z^{st*}(x) + \frac{\delta}{\delta z_{st}(x)}\right).$$

В пространстве $F[z_{st}, z^{st*}]$ редукция числа состояний проводится выбором вектора состояния в виде

$$F = \left(exp\int\limits_{\Sigma} z_{st}(x)z^{st*}(x)d\sigma\right)\Phi[z].$$

Очевидно, что вектор

$$F_0 = exp\left(\int\limits_{\Sigma} z_{st}(x)z^{st*}(x)d\sigma\right)$$

является вакуумом операторов

$$\tilde{q}_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z_{st}(x) + \frac{\delta}{\delta z^{st*}(x)}\right),$$

$$\tilde{p}^{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(z^{st*}(x) - \frac{\delta}{\delta z_{st}(x)}\right).$$

То есть операторы $\hat{q}_{st}(x)$ и $\hat{p}^{st}(x)$ реализуются в голоморфном представлении. Однако поскольку существует условие ([1], уравнение (3)), которое было введено одновременно с переменными Боголюбова, непосредственно использовать голоморфное представление нельзя. Мы используем следующую процедуру: сначала вводим переменные Боголюбова (2) и развиваем схему теории возмущений, получая при этом лишние состояния. Затем проводим редукцию числа состояний, которая будет зависеть от динамических уравнений системы.

Операторы координаты и импульса в терминах новых переменных:

$$\hat{q}_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(gv_{st}(x') + u_{st}(x') + i\frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')} + \right.$$
$$\left. + B_q^p(a)\frac{\delta a^q}{\delta f_n^{st}(x)}\left(iS_p + iA_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}\right)\right),$$
$$\hat{p}^{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(gv_n^{st}(x') + u_n^{st}(x') - i\frac{\delta}{\delta u_{st}(x')} - \right.$$
$$\left. - B_q^p(a)\frac{\delta a^q}{\delta f_{st}(x)}\left(iS_p + iA_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}\right)\right),$$

где g — константа связи, определенная в [1].

Поскольку $g \gg 1$, операторы $\frac{\partial}{\partial \tau^\alpha}$ входят в $\hat{q}_{st}(x')$ и $\hat{p}^{st}(x')$ только в порядке $O\left(\frac{1}{g}\right)$. Чтобы исправить ситуацию совершим каноническое преобразование с параметром J. Заменим вектор состояния ψ на вектор:

$$\psi \longrightarrow e^{ig^2 J}\psi,$$

что соответствует замене:

$$-iA_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r} \longrightarrow g^2 J_p - iA_p^r(a)\frac{\partial}{\partial a^r}. \tag{2}$$

После канонического преобразования операторы $\hat{p}^{st}(x)$ и $\hat{q}_{st}(x)$ представляются в виде ряда:

$$\hat{q}_{st} = g\left(F_{st}(x') + \frac{1}{g}\hat{Q}_{st}(x') + \frac{1}{g^2}A_{st}(x')\right),$$
$$\hat{p}^{st} = g\left(F_n^{st}(x') + \frac{1}{g}\hat{P}^{st}(x') + \frac{1}{g^2}A_n^{st}(x')\right).$$

Явные выражения для слагаемых этих рядов:

$$F_{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_{st}(x') + N_{st}^k(x')J_k\right),$$
$$F_n^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_n^{st}(x') + N_n^{stk}(x')J_k\right),$$
$$\hat{Q}_{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{st}(x') + i\frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')} - N_{st}^k(x)r_k\right),$$
$$\hat{P}^{st}(x') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_n^{st}(x') - i\frac{\delta}{\delta u_{st}(x)} - N_n^{stk}(x')r_k\right),$$
$$A_{st}(x') = \frac{\delta a^p}{\delta f_n^{st}(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right),$$
$$A_n^{st}(x') = \frac{\delta a^p}{\delta f_{st}(x)}\left(B_p^r(a)R_r^k r_k - iK_p\right),$$

где

$$T_c = K_c + R_c^a r_a, \quad K_p = B_p^q(a)S_q + \frac{\partial}{\partial a^p}, \quad r_k = R_k^p J_p.$$

Определим контравариантные компоненты операторов координаты и импульса, принимая во внимание тот факт, что они должны удовлетворять соотношениям:

$$\hat{q}^{sl}(x)\hat{q}_{st}(x) = \delta_t^l, \quad \hat{q}^{sl}(x)\hat{p}_{st}(x) = \hat{p}^{sl}(x)\hat{p}_{st}(x).$$

Это возможно, если операторы выглядят следующим образом:

$$\hat{q}^{st}(x) = g\left(F^{st}(x') - \frac{1}{g}\hat{Q}^{st}(x') + \frac{1}{g^2}B^{st}(x')\right),$$
$$\hat{p}_{st}(x) = g\left(F_{nst}(x') + \frac{1}{g}S_{st}(x') + \frac{1}{g^2}D_{st}(x')\right),$$

слагаемые определены соотношениями:

$$F_n^{st}F_{sl} = F^{st}F_{n_{sl}}, \quad F^{sl}F_{n_{st}} = \delta_t^l, \quad \hat{Q}^{st} = F^{rt}\hat{Q}_{rl}F^{sl},$$
$$B^{st} = F^{sk}\hat{Q}_{kl}F^{lt}\hat{Q}_{sm}F^{mr} - F^{st}A_{sl}F^{lr},$$
$$S_{kl} = F_n^{bt}\left(\hat{Q}_{bt}F_{kl} + \hat{Q}_{bl}F_{kt}\right) + F_{bl}\hat{P}^{st}F_{kt},$$
$$D_{pl} = A_{n_{pl}} + F_n^{st}\left(F_{tp}A_{sl} + F_{sl}A_{tp}\right) + F_n^{sm}\hat{Q}_{sl}\hat{Q}_{mp} +$$
$$+ 2F_{tp}\hat{P}^{st}\hat{Q}_{sl}.$$

Тогда действие в терминах новых переменных представляет из себя ряд по обратным степеням константы связи:

$$S = g^2 S_0 + gS_1 + S_2 + \ldots\,. \tag{3}$$

Схема регулярной теории возмущений

Теперь можно провести процедуру вторичного квантования путем замены в действии $u_{st}(x')$, $u_n^{st}(x')$ на операторы:

$$u_{st}(x') \mapsto \hat{q}^{st}(x), \quad u_n^{st}(x') \mapsto \hat{p}^{st}(x).$$

В ряде (3) оператор S_0 является C-числом.

Рассмотрим следующий порядок:

$$S_1 = \int\limits_\Sigma A_{st}(x')\hat{P}^{st}(x') + B^{st}(x')\hat{Q}_{st}(x'),$$

явный вид $A_{st}(x')$, $B^{st}(x')$ дан в Приложении, так что оператор S_1 линеен по $u_{st}(x')$, $u_n^{st}(x')$, $\frac{\partial}{\partial u_{st}(x')}$, $\frac{\partial}{\partial u_n^{st}(x')}$. Поскольку не существует нормируемых собственных векторов этого оператора, нужно, чтобы он был равен нулю. Выясним, при каких условиях это возможно.

Действие можно переписать в виде

$$S_1 = \int\limits_\Sigma A_{st}\left(u_n^{st} - i\frac{\delta}{\delta u_{st}} - N_n^{stk}r_k\right) +$$
$$+ B^{st}\left(u_{st} + i\frac{\delta}{\delta u_n^{st}} - N_{st}^k r_k\right)$$

и представить его как сумму

$$S_1 = -i\int\limits_\Sigma A_{st}\frac{\delta}{\delta u_{st}} - B^{st}\frac{\delta}{\delta u_n^{st}} +$$
$$+ \int\limits_\Sigma A_{st}\left(u_n^{st} - N_n^{stk}r_k\right) + B^{st}\left(u_{st} - N_{st}^k r_k\right).$$

В статье [1] была получена линейная связь между $\frac{\delta}{\delta u_{st}(x')}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n^{st}(x')}$:

$$\int\limits_{\Sigma} d\sigma \left(M_{str} \frac{\delta}{\delta u_{st}} + M_{nr}^{st} \frac{\delta}{\delta u_n^{st}} \right) = 0.$$

Линейная форма по производным в S_{-1} будет равна нулю, если мы потребуем, чтобы $A_{st}(x')$ и $B^{st}(x')$ были линейными комбинациями $M_{sta}(x')$ и $M_{na}^{st}(x')$:

$$A_{st}(x') = c^a M_{sta}(x'), \quad B^{st}(x') = c^a M_{na}^{st}(x').$$

Остаются линейные формы по $u_{st}(x')$ и $u_n^{st}(x')$ в S_1:

$$\begin{aligned} S_1 = \int\limits_{\Sigma} A_{st} \left(u_n^{st} - N_n^{stk} r_k \right) + B^{st} \left(u_{st} - N_{st}^k r_k \right) = \\ = c^a \int\limits_{\Sigma} \left(M_{sta} u_n^{st} - M_{na}^{st} u_{st} \right) - \\ - r_k \int\limits_{\Sigma} \left(M_{sta}(x') N_n^{stk} - M_{na}^{st} N_{st}^k \right). \end{aligned}$$

Вспоминая [1], что $\omega \left(M_{sta} N_{st}^k \right) = \delta_a^k$ и

$$\begin{aligned} r_k = R_k^p J_p = \\ = J_p \int\limits_{\Sigma} d\sigma \xi_r^i(x') \left(N_{ni}^{stp}(x') u_{st}(x') - N_{sti}^p(x) u_n^{st}(x') \right), \end{aligned}$$

получаем, что линейная форма по $u_{st}(x')$ и $u_n^{st}(x')$ равна нулю, если на Σ выполняются условия:

$$v_{st}(x') = J_k N_{st}^k(x'), \quad F_{st}(x') = \sqrt{2} v_{st}(x').$$

Здесь же возникает выражение для параметра канонического преобразования (2) (скорость классической части):

$$J_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\Sigma} F_n^{st} M_{stk} - F_{st} M_{nk}^{st}$$

и для $c^a = \sqrt{2}$, так что можно утверждать, что линейная форма по производным и $u_{st}(x')$ и $u_n^{st}(x')$ в операторе S_1 равна нулю, если на Σ выполняются уравнения:

$$\begin{aligned} F_{stn} &= \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_{stn} - \frac{1}{2} F_n F_{st} \right), \\ F_{nn}^{st} &= \frac{a}{2\sqrt{F}} \left(F_{lkn} F_n^{lk} - \frac{1}{2} F_n^2 \right) F^{st} - \\ &\quad - \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_n^{st} F_n^{kl} F_{stn} - \frac{1}{2} F_n F_n^{st} \right) - \\ &\quad - a\sqrt{F} \left(R^{st} - \tfrac{1}{2} F^{st} R \right) - \sqrt{F} \left(F^{sl} c_{;l}^t - F^{st} c_{;l}^l \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения эволюции.

Здесь и далее будем рассматривть $F_{st}(x)$ как решение уравнений (4), а $F_{st}(x')$ и $F_n^{st}(x')$ на Σ — решение задачи Коши на Σ, то есть утверждаем, что на 3D-гиперповерхности выполняются уравнения эволюции. Уравнения связи:

$$\frac{1}{\sqrt{F}} \left(F_n^{st} F_{stn} - \frac{1}{2} F_n^2 \right) - \sqrt{F} R(F) = 0, \quad F_{;l}^{sl} = 0$$

получаем как условия выбора Σ ([1], формула (1)).

Итак, учитывая сказанное в [1], мы утверждаем, что выполнение уравнений Эйнштейна является необходимым условием применимости теории возмущений. Подчеркнем, что уравнения Эйнштейна были получены при выяснении условий применимости теории возмущений, а не как следствие вариационного принципа.

Заключение

Получены уравнения Эйнштейна как необходимое условие применимости теории возмущений.

Построение пространства состояний системы, получение явного вида оператора поля и вектора состояния является задачей следующей статьи.

Приложение

Рассмотрим явный вид разложения гамильтониана в ряд по обратным степеням константы связи:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{st} \pi^{st} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{\gamma} R.$$

Первый порядок зависит только от классической компоненты поля, следующий порядок линеен по квантовой добавке и призводным по ней:

$$\begin{aligned} H_1 = \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{1}{2} \left(F_{n_{kl}} F_n^{kl} - \frac{1}{2} F_n^2 \right) F^{st} \hat{Q}_{st} + \right. \\ \left. + \left(\hat{P}^{st} F_{n_{st}} + F_n^{st} S_{st} \right) - F_n \left(\hat{P}^{st} F_{n_{st}} + \hat{Q}_{st} F_n^{st} \right) \right) - \\ - \sqrt{F} \left(\frac{1}{2} F^{st} R_{st}(F) \hat{Q}_{st} - \hat{Q}^{st} R_{st}(F) + F^{st} R_{st}(F, \hat{Q}) \right), \end{aligned}$$

и следующий порядок квадратичен по квантовой добавке и содержит переменные Боголюбова.

Рассмотрим слагаемые $a\sqrt{F} F^{st} R_{st}(F, \hat{Q})$.

Напомним, что $\Gamma_{lt}^s = \gamma^{sp} \Gamma_{ltp}$, и символы Кристоффеля являются рядами:

$$\Gamma_{ltp} = \Gamma_{ltp}(F) + \frac{1}{g} \Gamma_{ltp}(\hat{Q}) + \frac{1}{g^2} \Gamma_{ltp}(A),$$

тогда

$$\Gamma_{ltp}(\hat{Q}) = \frac{1}{2} \left(\hat{Q}_{tp;_l} + \hat{Q}_{lp;_t} - \hat{Q}_{lt;_p} \right) - 2\hat{Q}_{mp} \Gamma_{lt}^m(F),$$

$$\Gamma_{lt}^s(\hat{Q}) = \frac{1}{2} F^{sp} \left(\hat{Q}_{tp;_l} + \hat{Q}_{lp;_t} - \hat{Q}_{lt;_p} \right).$$

Рассмотрим тензор Риччи, который также является рядом:

$$R_{st} = R_{st}(F) + \frac{1}{g} R_{st}(F, \hat{Q}) + \frac{1}{g^2} R_{st}(F, \hat{Q}, A),$$

где

$$R_{st}(F,\hat{Q}) = \Gamma^l_{st;_l}(\hat{Q}) - \Gamma^l_{st;_t}(\hat{Q}) + \Gamma^l_{st}(\hat{Q})\Gamma^m_{lm}(F) + \\ + \Gamma^l_{st}(F)\Gamma^m_{lm}(\hat{Q}) - \Gamma^m_{sl}(\hat{Q})\Gamma^l_{mt}(F) - \Gamma^m_{sl}(F)\Gamma^l_{mt}(F),$$

поэтому

$$R_{st}(F,\hat{Q}) = \left(\Gamma^l_{st}(\hat{Q})\right)_{;l} - \left(\Gamma^l_{sl}(\hat{Q})\right)_{;t}.$$

Заметим, что $c^s = a_{;t}F^{st}$ и

$$\sqrt{F}F^{st}a_{;l}\Gamma^l_{st}(\hat{Q}) = Div + \frac{1}{2}\sqrt{F}F^{lp}\hat{Q}_{lp}c^s_{;s} - \sqrt{F}F^{sl}\hat{Q}_{lp}c^p_{;s},$$

и, наконец, искомое слагаемое имеет вид:

$$a\sqrt{F}F^{st}R_{st}(F,\hat{Q}) = Div + \sqrt{F}\hat{Q}_{st}\left(F^{sp}c^t_{;p} - F^{st}c^p_{;p}\right).$$

Итак, окончательное выражение для действия:

$$S_1 = \int\limits_\Sigma \hat{P}^{st}(x')F_{n_{st}}(x') + F^{st}_n(x')\hat{Q}_{n_{st}}(x') + aH_1(F,\hat{Q}) = \\ = \int\limits_\Sigma A_{st}(x')\hat{P}^{st}(x') + B^{st}(x')\hat{Q}_{st}(x'),$$

$$A_{st} = \frac{2a}{\sqrt{F}}\left(F_{n_{st}} - \frac{1}{2}F_nF_{st}\right),$$

$$B^{st} = \frac{a}{2\sqrt{F}}\left(F_{n_{kl}}F^{kl}_n - \frac{1}{2}F^2_n\right)F^{st} - \\ - \frac{2a}{\sqrt{F}}\left(F^{st}_nF^{kl}_nF_{n_{st}} - \frac{1}{2}F_nF^{st}_n\right) - a\sqrt{F}\left(R^{st} - \frac{1}{2}F^{st}R\right) - \\ - \sqrt{F}\left(F^{sl}c^t_{;l} - F^{st}c^l_{;l}\right).$$

Литература

1. *Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2003. No. 4).

Поступила в редакцию
23.09.02

УДК 517.958; 621.372.8

О ЛОВУШЕЧНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ МОДАХ, УБЫВАЮЩИХ СТЕПЕННЫМ ОБРАЗОМ

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, Ю. В. Мухартова, В. Л. Пономарева

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Приведены примеры гофрированных (асимптотически слабо нерегулярных) волноводов, обладающих ловушечными модами при заданной частоте. Показано, что поле, существующее в таких волноводах, может спадать степенным образом с любым целым показателем степени.

Построенные в работах [1–5] волноводы, обладающие ловушечными модами, являются локально нерегулярными. Но если плоский регулярный волновод

$$\Omega_0 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\quad 0 < y < l\}$$

ширины l лишь локально деформировать до волновода Ω так, что Ω и Ω_0 совпадают вне круга достаточно большого радиуса, то в получившемся волноводе все собственные функции $u(x,y)$ вне этого круга представимы в виде суперпозиции нормальных волн (см. [6]):

$$u(x,y) = \sum_n C_n \sin(\alpha_n y) e^{-\sqrt{\lambda - \alpha_n^2}|x|},$$

где $\alpha_n = \sqrt{\frac{\pi n}{l}}$ — собственные значения задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $(0,l)$ с граничными условиями Дирихле. Таким образом, собственные функции $u(x,y)$ во всех упомянутых выше примерах убывают экспоненциально. Большая часть энергии таких волн сосредоточена в конечной области, в «ловушке», поэтому их называют ловушечными модами.

Однако экспоненциальное убывание не является характерным свойством собственных функций волноведущих систем. Как удалось показать в работах [7, 8], в гофрированных волноводах существуют собственные функции, отвечающие заданному собственному значению, убывающие существенно медленнее. А именно, были построены такие гофрированные асимптотически слабо нерегулярные волноводы Ω, в которых собственная функция спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \int\limits_\Omega d\tau u^2 < \infty \end{cases} \tag{1}$$

убывает как $|x|^{-1}$, Ox — ось волновода. При этом мы, как и в упомянутых работах, придерживаемся следующей терминологии.

Волновод называется асимптотически слабо нерегулярным, если вне круга достаточно большого ра-