ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.7

КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ ГРУППОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ БОГОЛЮБОВА. I. ОПЕРАТОРЫ КООРДИНАТЫ И ИМПУЛЬСА

С. Ю. Вернов, О. А. Хрусталев, М. В. Чичикина

(*НИИЯФ; кафедра теории поля и физики высоких энергий*)

E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru, khrust@goa.bog.msu.su, chich@hep.phys.msu.su

Для $(N+1)$-мерных систем, инвариантных относительно преобразований, образующих группу Ли, определяются групповые переменные Боголюбова, что позволяет провести квантование вблизи нестационарного классического скалярного поля с учетом законов сохранения и решить проблему возникновения нулевых мод.

Введение

Одной из проблем квантования в окрестности классических решений является восстановление свойств симметрии, утрачиваемых при непосредственном выделении классической составляющей. Для решения этой проблемы в 1950 г. Н. Н. Боголюбовым было предложено каноническое преобразование [1], в результате которого вводятся групповые переменные. Преобразование Боголюбова [1–3] превращает, например, статическое классическое решение $\sigma(x)$ в оператор $\sigma(x-\hat{a})$, причем на преобразование трансляции реагирует лишь переменная $\hat{a}$ — функционал операторов поля. Трансляционную инвариантность полной теории обеспечивает то обстоятельство, что $\hat{a}$ является оператором, канонически сопряженным оператору полного импульса. После проведения преобразования Боголюбова можно применять обычную схему теории возмущений.

Метод Боголюбова под названием метода коллективных координат был независимо сформулирован в середине семидесятых годов в работах [4–8]. Связь этих методов обсуждалась в [9], при этом отмечалось, что данные исследования посвящены изучению нерелятивистских симметрий.

К настоящему времени накоплено большое количество примеров использования групповых переменных в теории сильной связи и других областях теоретической физики (подробный список литературы приведен в [10]).

Исследование систем с нестационарной классической компонентой является более трудной задачей, так как явная структура гамильтониана как генератора временных трансляций становится ясной только после решения уравнений движения и определения групповых переменных. В этой ситуации представляется естественным определение групповых переменных по некоторой схеме теории возмущений, уточняемой вместе с вычислением интегралов движения. Метод, позволяющий проводить квантование в окрестности нестационарных классических решений с помощью локального преобразования Боголюбова, предложен в работе [10]. Указанная схема была развита для $(1+1)$-мерной теории действительного скалярного поля [10] и распространена на случай системы взаимодействующих полей [11]. Недавно с помощью данного метода было проведено квантование гравитационного поля, при этом использовался ADM формализм [12].

В данной работе метод групповых переменных Боголюбова обобщен на случай $(3+1)$-мерной теории поля.

В первой статье рассматривается квантовая система в произвольном K-мерном псевдоевклидовом пространстве, инвариантном относительно L-параметрической группы Ли [2], и строятся операторы координаты и импульса в терминах групповых переменных Боголюбова. Показано, что явный вид формул не зависит от числа пространственных измерений, а также от конкретного вида группы Ли. В следующей статье будет рассмотрена $(3+1)$-мерная Пуанкаре-инвариантная система и построена схема квантования в окрестности скалярного классического поля $F(\mathbf{x})$.

1. Преобразование Боголюбова

Для $(1+1)$-мерных релятивистски инвариантных систем групповые переменные Боголюбова были введены в работе [10], в нашей статье мы покажем, как данные переменные вводятся для произвольной системы.

Пусть $\mathcal{D}$ — K-мерное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(1,K-1)^{*)}$, а $\mathcal{G}$ — L-параметрическая группа Ли [2]. Обозначим параметры группы $\mathcal{G}$ через $\tau\equiv(\tau^0,\tau^1,\ldots,\tau^{L-1})$ {единице группы соответствуют значения параметров $\tau^a=0$} и предположим, что каждому элементу $g(\tau)\in\mathcal{G}$ соответствует

$^{*)}$ Пространство Минковского является четырехмерным псевдоевклидовым пространством сигнатуры $(1,3)\equiv(+\,-\,-\,-)$.

преобразование пространства $\mathcal{D}$. Исходные координаты на $\mathcal{D}$ обозначим через $\mathbf{x}=(x^0,x^1,\ldots,x^{K-1})$, а координаты преобразованных точек через $\mathbf{x}'$. Функции $X^\alpha(\mathbf{x},\tau)$, связывающие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$:

$$x'^\alpha = X^\alpha(\mathbf{x},\tau)\equiv \mathbf{x}'(\mathbf{x},\tau),$$

являются гладкими функциями всех своих аргументов и удовлетворяют условиям: $X^\alpha(X(\mathbf{x},\tau_2),\tau_1) = X^\alpha(\mathbf{x},\varrho(\tau_1,\tau_2))$. Функция ϱ определяет закон композиции рассматриваемой группы: $g(\varrho(\tau_1,\tau_2)) = g(\tau_1)g(\tau_2)$. Обратное преобразование обозначим как $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau')$.

Пусть f — функция поля, содержащая фиксированную классическую составляющую v и квантовую составляющую u:

$$f(\mathbf{x}') = G\cdot v(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) + u(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)), \tag{1}$$

будем рассматривать функции v и u как функции $K+L$ независимых переменных $\{\mathbf{x}',\tau\}$.

Признание параметров преобразования τ^a в качестве новых независимых переменных привело к появлению L лишних степеней свободы, поэтому следует наложить L независимых дополнительных условий. Сформулируем эти условия следующим образом. Зададим с помощью уравнения в координатах $\mathbf{x}'$ пространственноподобную гиперплоскость C размерности $K-1$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к C, определим для произвольных дифференцируемых функций g_1 и g_2 функционал

$$\omega(g_1,g_2)\equiv \int\limits_C \Big(g_{1n}(\lambda)g_2(\lambda) - g_1(\lambda)g_{2n}(\lambda)\Big)\,dS, \tag{2}$$

где $g_{in}\equiv \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{n}} \equiv n^\alpha \frac{\partial g_i}{\partial x^\alpha}$ — нормальная производная на C, $i=1,2$. Элемент площади гиперплоскости C равен $dS\equiv d\lambda'^1\ldots d\lambda'^{K-1}$. Оператор $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ является инвариантом по отношению к преобразованиям группы $\mathcal{G}$. Функции $g(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))$ при $\mathbf{x}'\in C$, т. е. $g(\mathbf{x}(\lambda',\tau))$, будем обозначать $g(\lambda)$, опуская зависимость от групповых переменных.

Вариация $v(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))$ выражается через бесконечно малые линейно независимые параметры преобразования $\delta\tau^c$ следующей формулой*):

$$\delta v(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) = \frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau^c}\delta\tau^c \equiv -M_c(\mathbf{x},\tau)\delta\tau^c. \tag{3}$$

При интегрировании по C обозначим $M_c(\mathbf{x},\tau)$ как $M_c(\lambda)$.

Наложим условия на функцию u: пусть при всех значениях τ^a

$$\forall a = 0\ldots L-1 : \omega(N^a,u)=0, \tag{4}$$

где $N^a(\mathbf{x}',\tau)$ — дифференцируемые функции, такие что

$$\forall a,b = 0\ldots L-1 : \omega(N^a,N^b)=0.$$

*) Индекс α пробегает значения от 0 до $K-1$, а индекс c — от 0 до $L-1$.

Потребуем еще, чтобы $\det||\omega(N^a,M_b)|| \equiv \det||D^a_b||\neq 0$, тогда для функций $\tilde N^a(\mathbf{x},\tau) \equiv D^{-1a}_b N^b(\mathbf{x},\tau)$ будут выполняться соотношения

$$\omega(\tilde N^a, M_b) = \delta^a_b, \quad \omega(\tilde N^a,\tilde N^b)=0. \tag{5}$$

В силу линейности функционала ω условия (4) равносильны следующим:

$$\forall a = 0\ldots L-1 : \omega(\tilde N^a,u)=0. \tag{6}$$

Решение дифференциального уравнения однозначно определяется начальными условиями (данными задачи Коши) на некоторой пространственноподобной гиперповерхности. Будем рассматривать вместо $f(\mathbf{x}')$ ее данные Коши на C, при этом функции $f(\lambda')$ и $f_n(\lambda')$ считаются независимыми.

Подставляя в (6) выражение $u(\lambda)=f(\lambda') - Gv(\lambda)$, получаем, что следствием инвариантности дополнительных условий (6) относительно вариации параметров τ^a являются уравнения:

$$\begin{aligned}\int\limits_C \Big(\tilde N^a(\lambda)\delta f_n(\lambda') - \tilde N^a_n(\lambda)\delta f(\lambda')\Big)dS\, - \\ - R^a_b\delta\tau^b - G\delta\tau^a = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$R^a_b \equiv \int\limits_C \Big(\tilde N^a_{bn}(\lambda)u(\lambda) - \tilde N^a_b(\lambda)u_n(\lambda)\Big)dS,$$

$$\delta\tilde N^a \equiv \tilde N^a_b\delta\tau^b.$$

Из соотношения (7) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\delta\tau^a}{\delta f(\lambda')} &= -\frac{1}{G}Q^a_b\tilde N^b_n(\lambda),\\ \frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')} &= \frac{1}{G}Q^a_b\tilde N^b(\lambda),\end{aligned} \tag{8}$$

где величины Q^a_b — решения системы уравнений: $Q^a_b = \delta^a_b - \frac{1}{G}R^a_cQ^c_b$, имеют следующий вид:

$$Q^a_b = \delta^b_a - \frac{1}{G}R^a_b + \frac{1}{G^2}R^a_cR^c_b + \mathcal{O}(G^{-3}). \tag{9}$$

Мы перешли от переменных $f(\lambda')$ и $f_n(\lambda')$ к переменным $u(\lambda')$, $u_n(\lambda')$ и τ^a, ввели дополнительные условия и определили переменные τ^a как функционалы от $f(\lambda')$ и $f_n(\lambda')$, т. е. провели преобразование Боголюбова.

2. Квантование в терминах переменных Боголюбова

Операторы

$$\hat{q}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(\lambda') + i\frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')}\right)$$

и

$$\hat{p}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_n(\lambda') - i\frac{\delta}{\delta f(\lambda')}\right),$$

действующие на пространстве функционалов $\Phi[f, f_n]$ со скалярным произведением $<\Phi_1|\Phi_2> = \int DfDf_n\Phi_1^*[f,f_n]\Phi_2[f,f_n]$, самосопряжены и удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\forall\lambda', \mu' \in C : [\hat{q}(\lambda'), \hat{p}(\mu')] = i\delta(\lambda' - \mu'). \qquad (10)$$

Данное соотношение позволяет толковать $\hat{q}(\lambda')$ и $\hat{p}(\lambda')$ как операторы координаты и импульса и развить схему вторичного квантования. Однако использование функций $f(\lambda')$ и $f_n(\lambda')$ как независимых приводит к удвоению числа состояний поля. Это связано с существованием самосопряженных операторов $\tilde{q}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_n(\lambda') + i\frac{\delta}{\delta f(\lambda')}\right)$ и $\tilde{p}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(\lambda') - i\frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')}\right)$, удовлетворяющих перестановочному соотношению (10) и коммутирующих с $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Редукция числа состояний может быть осуществлена с помощью, например, голоморфного представления [10, 13]. Как показано в статье [13], пространство состояний нужной размерности является подпространством функционалов $\Phi[f, f_n]$. Однако процедура выделения из операторов классических составляющих и учета связей, возникающих из дополнительных условий (6), на данном подпространстве оказывается более сложной. Поэтому, не ограничивая вектор состояния конкретным подпространством, сначала выделим классическую составляющую и построим регулярную теорию возмущения. Только после этого станет возможным проведение редукции числа состояний и фиксация аналитической структуры векторов состояния.

Для того чтобы выразить операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ через новые переменные $u(\lambda)$ и τ^a, необходимо получить вариационные производные по функциям $u(\lambda)$ и $u_n(\lambda)$, удовлетворяющим соотношениям (6). Вычисления, аналогичные проведенным в [2, 10], позволяют выразить $u(\lambda)$ и $u_n(\lambda)$ через независимые функции $y(\lambda)$ и $y_n(\lambda)$ с помощью оператора проектора $\hat{K}$:

$$\begin{pmatrix} u(\lambda) \\ u_n(\lambda) \end{pmatrix} = \hat{K}\begin{pmatrix} y(\lambda) \\ y_n(\lambda) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(\lambda) - M_a(\lambda)\omega(\tilde{N}^a, y) \\ y_n(\lambda) - M_{an}(\lambda)\omega(\tilde{N}^a, y) \end{pmatrix}.$$

Из соотношения $\hat{K}^2 = \hat{K}$ нетрудно получить

$$\frac{\delta u(\lambda)}{\delta u(\mu)} = \delta(\lambda - \mu) - M_a(\lambda)\tilde{N}_n^a(\mu),$$

$$\frac{\delta u(\lambda)}{\delta u_n(\mu)} = M_a(\lambda)\tilde{N}^a(\mu),$$

$$\frac{\delta u_n(\lambda)}{\delta u(\mu)} = -M_{an}(\lambda)\tilde{N}_n^a(\mu),$$

$$\frac{\delta u_n(\lambda)}{\delta u_n(\mu)} = \delta(\lambda - \mu) + M_{an}(\lambda)\tilde{N}^a(\mu).$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \left(M_a(\lambda)\frac{\delta}{\delta u(\lambda)} + M_{an}(\lambda)\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda)}\right) dS = 0. \qquad (11)$$

Используя формулы (5), (8) и (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(\lambda')} &= \frac{\delta}{\delta u(\lambda)} - \frac{1}{G}Q_b^a\tilde{N}_n^b(\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\tau^a} + \hat{S}_a\right), \\ \frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')} &= \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda)} + \frac{1}{G}Q_b^a\tilde{N}^b(\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\tau^a} + \hat{S}_a\right), \end{aligned} \qquad (12)$$

оператор $\hat{S}_a$ определен следующим образом:

$$\hat{S}_a = \int\limits_C \left(u_a\frac{\delta}{\delta u} + u_{na}\frac{\delta}{\delta u_n}\right) dS, \quad u_a(\lambda) \equiv \frac{\partial u(\lambda)}{\partial\tau^a}. \qquad (13)$$

Производные по τ^a в формулах (12) содержат в качестве множителя малый параметр $1/G$. Чтобы учесть вклад $\frac{\partial}{\partial\tau^a}$ уже в нулевом порядке разложения по $1/G$, преобразуем векторы состояния: $\Phi[u, u_n] \longrightarrow \mathrm{e}^{iG^2J(\tau)}\,\Phi[u, u_n]$.

Соответствующее преобразование операторов выглядит так:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau^a} \longrightarrow -G^2J_a + i\frac{\partial}{\partial\tau^a}, \quad J_a \equiv \frac{\partial J(\tau)}{\partial\tau^a}. \qquad (14)$$

С помощью разложения (9) получаем, что операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$, выраженные через v и u, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{q}(\lambda) &= G\,F(\lambda) + \hat{Q}(\lambda) + \frac{1}{G}\hat{A}(\lambda) + \mathcal{O}(G^{-2}), \\ \hat{p}(\lambda) &= G\,F_n(\lambda) + \hat{P}(\lambda) + \frac{1}{G}\hat{A}_n(\lambda) + \mathcal{O}(G^{-2}), \end{aligned} \qquad (15)$$

где

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(v(\lambda) - J_a\tilde{N}^a(\lambda)\Big), \qquad (16)$$

$$\hat{Q}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u(\lambda) + i\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda)} + \tilde{N}^a(\lambda)r_a\right),$$

$$\hat{P}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_n(\lambda) - i\frac{\delta}{\delta u(\lambda)} + \tilde{N}_n^a(\lambda)r_a\right),$$

$$\hat{A}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{N}^b\left(i\hat{S}_b + i\frac{\partial}{\partial\tau^b} + R_b^a r_a\right), \quad r_a \equiv R_a^c J_c.$$

Преобразование (14) является первым шагом построения теории возмущений, не нарушающей законов сохранения. В следующей работе данная теория возмущений будет построена для $(3+1)$-мерной Пуанкаре-инвариантной системы.

Заключение

В настоящей работе были введены операторы координаты и импульса, пригодные для квантования в окрестности классического поля, нетривиально зависящего от времени. В следующей работе с помощью групповых переменных Боголюбова будет построена теория возмущений и дано полностью релятивистски инвариантное описание $(3+1)$-мерной Пуанкаре-инвариантной квантовой системы с ненулевой классической компонентой.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента России НШ-1450.2003.2 и НШ-1685.2003.2 и грантов научной программы «Университеты России» УР.02.03.002 и УР.02.03.028.

Литература

1. *Боголюбов Н.Н.* // Укр. матем. журн. 1950. **2**. № 2. С. 3; Избр. тр. Киев, 1970. **2**. С. 499.
2. *Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А.* // ТМФ. 1972. **10**. С. 162; **11**. С. 317; 1973. **12**. С. 164.
3. *Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Yu.* // Nucl. Phys. B. 1980. **172**. P. 44.
4. *Branco G.C., Sakita B., Senjanovic P.* // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 2573.
5. *Callan C.G., Gross D.J.* // Nucl. Phys. B. 1975. **93**. P. 29.
6. *Christ N.H., Lee T.D.* // Phys. Rev. D. 1975. **12**. P. 1606.
7. *Greutz M.* // Phys. Rev. D. 1975. **12**. P. 3126.
8. *Tomboulis E.* // Phys. Rev. D. 1975. **12**. P. 1678.
9. *Шургая А.В.* // ТМФ. 1980. **45**. С. 46; 1983. **57**. С. 392.
10. *Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // ТМФ. 1997. **111**. С. 242; С. 413.
11. *Спирина Е.Ю., Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // ТМФ. 2000. **122**. С. 417.
12. *Тимофеевская О.Д., Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. №4. С. 3; №5. С. 3; №6. С. 11 (Moscow University Phys. Bull. 2003. N 4. P. 1; N 5. P. 1; N 6).
13. *Тимофеевская О.Д.* // ТМФ. 1983. **54**. С. 464.

Поступила в редакцию
21.04.03