открывается возможность наблюдения $\mu\tau$-процесса, обусловленного майорановским нейтрино массы $m_N \sim 1$ ТэВ. При $\sqrt{s} = 25$ ТэВ могут наблюдаться процессы $\mu\tau$ и $\mu\mu$ для майорановских масс m_N в диапазоне $1 \div 3$ ТэВ.

Рассмотренные лептон-протонные процессы выгодно отличаются от протон-протонных отсутствием фоновых процессов, обусловленных стандартными взаимодействиями с сохранением лептонного числа [11]. В случае же pp-рассеяния возможны стандартные каскадные процессы, приводящие к рождению дилептонов с сигнатурой $(++)$ или $(--)$ [25].

Авторы выражают благодарность Д. В. Перегудову за помощь в проведении численных расчетов, а также участникам семинара под руководством проф. В. Ч. Жуковского за полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Particle Data Group Collab.: Hagiwara K.* et al. // Phys. Rev. D. 2002. **66**. P. 010001.
2. *Super-Kamoiokande Collab.: Fukuda S.* et al. // Phys. Lett. B. 2002. **539**. P. 179.
3. *SNO Collab.: Ahmad Q.R.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. **89**. P. 011301.
4. *KamLAND Collab.: Eguchi K.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2003. **90**. P. 021802.
5. *Pakvasa S., Valle J.W.F.* // E-print ArXive: hep-ph/0301061.
6. *Боум Ф., Фогель П.* Физика массивных нейтрино. М., 1990.
7. *Kayser B.* // E-print ArXive: hep-ph/0211134.
8. *Klapdor-Kleingrothaus H.V., Dietz A., Harney H.L., Krivosheina I.V.* // Mod. Phys. Lett. A. 2001. **16**. P. 2409.
9. *Ali A., Borisov A.V., Zamorin N.B.* // Frontiers of Particle Physics. — Proc. of the Tenth Lomonosov Conf. on Elementary Particle Physics (Moscow, 23–29 August 2001) / Ed. A.I. Studenikin. — Singapore: World Scientific, 2003. P. 74.
10. *Panella O., Cannoni M., Carimalo C., Srivastava Y.N.* // Phys. Rev. D. 2002. **65**. P. 035005.
11. *Flanz M., Rodejohann W., Zuber K.* // Phys. Lett. B. 2000. **473**. P. 324; 2000. **480**. P. 418(E).
12. *Rodejohann W., Zuber K.* // Phys. Rev. D. 2000. **62**. P. 094017.
13. *Flanz M., Rodejohann W., Zuber K.* // Eur. Phys. J. C. 2000. **16**. P. 453.
14. *Bilenky S.M., Guinti C., Grifols J.A., Massó E.* // Phys. Rep. 2003. **379**. P. 69.
15. *Bhattacharyya G., Pas H., Song L., Weiler T.J.* // Phys. Lett. B. 2003. **564**. P. 175.
16. *Langaker P.* // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2001. **100**. P. 383.
17. *Blaskiewicz M., Drees A., Fischer W.* et al. Fermilab Report TM-2158, 29 June 2001.
18. *de Almeida Jr. F.M.L., Coutinho Y.A., Martins Simões J.A., do Vale M.A.B.* // Phys. Rev. D. 2002. **65**. P. 115010.
19. *Dawson S.* // Nucl. Phys. B. 1985. **249**. P. 42.
20. *Kuss I., Spiesberger H.* Phys. Rev. D. 1996. **53**. P. 6078.
21. *Pumplin J., Stump D.R., Huston J.* et al. // JHEP. 2002. No. 07. Art. 012 [E-print ArXive: hep-ph/0201195].
22. *Nardi E., Roulet E., Tommasini D.* // Phys. Lett. B. 1995. **344**. P. 225.
23. *Bélanger G., Boudjema F., London D., Nadeau H.* // Phys. Rev. D. 1996. **53**. P. 6292.
24. *London D.* // E-print ArXive: hep-ph/9907419.
25. *Datta A., Guchait M., Roy D.P.* // Phys. Rev. D. 1993. **47**. P. 961.

Поступила в редакцию
30.04.03

УДК 530.12, 51:53

ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ: СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ

А. Н. Петров

(*ГАИШ*)

E-mail: petrov@xray.sai.msu.ru

Рассмотрена общая терия относительности в виде, где гравитационные возмущения вместе с другими физическими полями распространяются на вспомогательном фоне. В произвольно искривленном заданном пространстве-времени с использованием техники Каца–Бичака–Линден-Белла построены новые сохраняющиеся токи, дивергенции от антисимметричных тензорных плотностей (суперпотенциалов).

1. Краткий обзор и постановка задач

Возмущенные уравнения Эйнштейна часто представляют в следующем виде: линейные возмущения метрики оставляют слева, а все остальные (нелинейные) члены переносят направо и вместе с материальным тензором энергии-импульса трактуют как полный (эффективный) тензор энергии-импульса $t^{(\mathrm{tot})}_{\mu\nu}$. Такой подход был разработан как теория тензорного поля с самодействием в заданном фоновом пространстве-времени и называется полевой формулировкой [1] общей теории относительности

(ОТО). При этом $t_{\mu\nu}^{(\mathrm{tot})}$ получается варьированием действия по фоновой метрике $\overline{g}^{\mu\nu}$. Дезер [2], обобщая предыдущие работы и используя формализм 1-го порядка, предложил наиболее последовательную полевую формулировку ОТО в замкнутой форме (без разложений) в плоском пространстве-времени. Для случая Риччи-плоского фона и в квадратичном приближении Бичак доказал теорему: с необходимостью $t_{\mu\nu}^{(\mathrm{tot})}$ должен содержать вторые производные гравитационных переменных [3].

Нами [4] для произвольно искривленных фонов построена полевая формулировка ОТО со всеми свойствами полевой теории в фиксированном пространстве-времени. Эти результаты получили развитие и примененяются в настоящее время. Так, в статье [5] на основании результатов и техники работы [4], а также требования только первых производных в симметричном тензоре энергии-импульса, была получена новая полевая формулировка ОТО в пространстве Минковского. Здесь нет противоречия с теоремой, доказанной в работе [3], поскольку в статье [5] левая часть, в отличие от стандартных подходов, нелинейна. В [6], на основании результатов работы [4] были получены полные энергия и угловой момент для $d+1$-мерного асимптотически анти-де ситтеровского пространства-времени. При решении многих задач появляются свойства результатов работы [4]. Например, в [7] и [8] рассмотрение возмущений на фридмановских фонах приводит к линейным приближениям в полной теории [4]. В рамках полевого подхода в [9] построен класс «слегка биметрических» гравитационных теорий, а в [10] изучается поведение световых конусов. Насколько мы знаем, в работе [10] приведена самая полная на настоящий момент библиография по полевому подходу в гравитации.

Современная космология и релятивистская астрофизика в большей части изучают эволюцию возмущений на заданных пространственно-временных фонах. Инфляционные модели и открытие ускоренного расширения вселенной [11] повышают интерес к фонам, определенным решениями де Ситтера с космологической постоянной. При возрастающей точности наблюдений становится необходимым рассматривать не только линейные, но и следующие порядки возмущений. Важным оказывается построение законов сохранения для возмущений, в том числе на фонах (анти-)де ситтеровских решений (см. [12, 15]). Эти задачи имеют большое значение для развития полевой формулировки ОТО. Отметим, что кроме нее существуют другие подходы, большое разнообразие которых (см. обзор [16]) вызвано неоднозначным определением в ОТО таких величин, как энергия. Одним из самых последовательных является монадный метод описания систем отсчета, основанный на введении конгруэнции времениподобных мировых линий приборов (наблюдателей) [17, 18]. Основа построения — это поле монады, единичного вектора, касательного к линиям конгруэнции. С его помощью определяются как плотность энергии и импульса материи, так и величины, имеющие смысл плотности энергии и импульса гравитационного поля.

Вернемся к полевому подходу. Несмотря на все достижения, некоторые вопросы остались без ответа. Во-первых, чтобы построить ток, как обычно, $t_{\mu}^{(\mathrm{tot})\nu}$ сворачивается с каким-либо вектором Киллинга фона $\overline{\xi}^{\mu}$ [4]: $\hat{\imath}^{\nu} = \sqrt{-\overline{g}}\, t_{\mu}^{(\mathrm{tot})\nu}\overline{\xi}^{\mu}$. Ток дифференциально сохраняется $\hat{\imath}^{\nu}{}_{;\nu} = \hat{\imath}^{\nu}{}_{,\nu} = 0$, если выполняется дифференциальный ковариантный закон сохранения $t_{\mu}^{(\mathrm{tot})\nu}{}_{;\nu} = 0$, который имеет место лишь на плоских, Риччи-плоских и (анти-)де ситтеровских фонах. Для более сложных фонов, таких как большинство космологических, $t_{\mu}^{(\mathrm{tot})\nu}{}_{;\nu} \neq 0$. Это объяснено взаимодействием динамической и фоновой систем [4], но только качественно. Однако существует необходимость математического описания, которую обозначим проблемой (А). Во-вторых, суперпотенциалы (антисимметричные тензорные плотности, дивергенции от которых представляют сохраняющиеся токи) играют очень важную роль в ОТО (см. [13, 19] и ссылки там). В то же время разработка суперпотенциалов в рамках полевого подхода не достаточна. Определим это как проблему (Б), в связи с которой можно упомянуть лишь следующее. Дивергенция линейной левой части уравнений (как минимум на плоском фоне) равна нулю, поэтому левая часть уже задана через суперпотенциал. На основании этого свойства Абботт и Дезер [12] построили суперпотенциал с векторами Киллинга на (анти-)де ситтеровских фонах.

В настоящей работе решены проблемы (А) и (Б), они оказались взаимосвязанными. В результате в полевой формулировке ОТО получены суперпотенциалы и соответствующие им токи на произвольно искривленных фонах и с произвольными векторами смещений.

2. Полевая формулировка ОТО

Представим основные свойства формулировки работы [4] в формализме 2-го порядка. Рассмотрим так называемый динамический лагранжиан [20, 21]:

$$\hat{\mathcal{L}}^{dyn} = \hat{\mathcal{L}}^{E}_{(dec)} - \hat{l}^{\mu\nu}\frac{\delta\overline{\hat{\mathcal{L}}^{E}}}{\delta\overline{\hat{g}^{\mu\nu}}} - \phi^{A}\frac{\delta\overline{\hat{\mathcal{L}}^{E}}}{\delta\overline{\Phi^{A}}} - \overline{\hat{\mathcal{L}}^{E}} - \frac{1}{2\kappa}\hat{k}^{\alpha}{}_{,\alpha}, \quad (1)$$

построение которого основано на обычном лагранжиане ОТО

$$\hat{\mathcal{L}}^{E} = -(2\kappa)^{-1}\hat{R}(g_{\mu\nu}) + \hat{\mathcal{L}}^{M}(\Phi^{A}, g_{\mu\nu}) \quad (2)$$

с метрикой $g_{\mu\nu}$, скалярной кривизной $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ и материальными переменными Φ^{A}, представляющими набор произвольных тензорных плотностей (не спиноров). Частные производные обозначаются как $({}_{,\alpha})$; крышки «$\hat{\ }$» означают плотности веса $+1$;

$\delta/\delta a$ — лагранжевы производные; $\hat{\mathcal{L}}^E_{(dec)}$ — лагранжиан (2) после подстановки разбиений

$$\hat{g}^{\mu\nu} \equiv \overline{\hat{g}^{\mu\nu}} + \hat{l}^{\mu\nu}, \quad \Phi^A \equiv \overline{\Phi^A} + \phi^A. \tag{3}$$

Возмущения $\hat{l}^{\mu\nu}$ и ϕ^A определяются как независимые гравитационные и материальные динамические переменные; черта означает заданные фоновые величины, и $\overline{\hat{g}^{\mu\nu}}$ и $\overline{\Phi^A}$ удовлетворяют фоновым уравнениям Эйнштейна; индексы смещаются фоновой метрикой. Полагаем также

$$\hat{k}^\mu = (\overline{\hat{g}^{\mu\rho}}+\hat{l}^{\mu\rho})(\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}-\overline{\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}})-(\overline{\hat{g}^{\rho\sigma}}+\hat{l}^{\rho\sigma})(\Gamma^\mu_{\rho\sigma}-\overline{\Gamma^\mu_{\rho\sigma}}), \tag{4}$$

где символы Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ зависят от $\hat{g}^{\mu\nu}$ как суммы в (3).

Представим лагранжиан (1) в виде суммы чисто гравитационной и материальной частей: $\hat{\mathcal{L}}^{dyn} = -(2\kappa)^{-1}\hat{\mathcal{L}}^g + \hat{\mathcal{L}}^m$. Как видно, (1) получен вычитанием из $\hat{\mathcal{L}}^E_{(dec)}$ нулевой и линейной по $\hat{l}^{\mu\nu}$ и ϕ^A частей функционального разложения $\hat{\mathcal{L}}^E_{(dec)}$. Нулевой член — это фоновый лагранжиан, а линейный пропорционален операторам фоновых уравнений. Варьирование $\hat{\mathcal{L}}^{dyn}$ по $\hat{l}^{\mu\nu}$ и ϕ^A, алгебраические преобразования и учет фоновых уравнений дают уравнения Эйнштейна в виде

$$\hat{G}^L_{\mu\nu} + \hat{\Phi}^L_{\mu\nu} = \kappa\left(\hat{t}^g_{\mu\nu} + \hat{t}^m_{\mu\nu}\right) \equiv \kappa \hat{t}^{(\mathrm{tot})}_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Здесь левая часть, линейная по $\hat{l}^{\mu\nu}$ и ϕ^A, представлена выражениями

$$\hat{G}^L_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta}{\delta\overline{g^{\mu\nu}}}\hat{l}^{\rho\sigma}\frac{\delta\overline{\hat{R}}}{\delta\overline{\hat{g}^{\rho\sigma}}} \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2}\left(\hat{l}_{\mu\nu;\rho}{}^{;\rho} + \overline{g}_{\mu\nu}\hat{l}^{\rho\sigma}{}_{;\rho\sigma} - \hat{l}_\mu{}^\rho{}_{;\nu\rho} - \hat{l}_\nu{}^\rho{}_{;\mu\rho}\right), \tag{6}$$

$$\hat{\Phi}^L_{\mu\nu} \equiv -2\kappa\frac{\delta}{\delta\overline{g^{\mu\nu}}}\left(\hat{l}^{\rho\sigma}\frac{\delta\overline{\hat{\mathcal{L}}^M}}{\delta\overline{\hat{g}^{\rho\sigma}}} + \phi^A\frac{\delta\overline{\hat{\mathcal{L}}^M}}{\delta\overline{\Phi^A}}\right) \tag{7}$$

с ковариантными производными $({}_{;\mu})$, построенными с помощью $\overline{g}_{\mu\nu}$. Правая сторона (5) является симметричной (метрической) плотностью полного тензора энергии-импульса:

$$\hat{t}^{(\mathrm{tot})}_{\mu\nu} \equiv 2\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}^{dyn}}{\delta\overline{g^{\mu\nu}}} \equiv 2\frac{\delta}{\delta\overline{g^{\mu\nu}}}\left(-\frac{1}{2\kappa}\hat{\mathcal{L}}^g + \hat{\mathcal{L}}^m\right) \equiv \hat{t}^g_{\mu\nu} + \hat{t}^m_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Явные выражения для $\hat{\mathcal{L}}^g$ и $\hat{t}^g_{\mu\nu}$ следуют из (1), и их можно найти в [4].

3. Суперпотенциалы и сохраняющиеся токи

Наше построение законов сохранения в полевой формулировке ОТО следует методу, развитому Кацем, Бичаком и Линден-Беллом (КБЛ) [13]. Их лагранжиан

$$\hat{\mathcal{L}}_G = -(2\kappa)^{-1}\left(\hat{R} + \hat{k}^\mu{}_{,\mu} - \overline{\hat{R}}\right) \tag{9}$$

зависит от физической метрики $g_{\mu\nu}$ (без разбиений) и фоновой метрики $\overline{g}_{\mu\nu}$; величина $\hat{k}^\mu$ определена также в (4), только с $\hat{l}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - \overline{\hat{g}^{\mu\nu}}$. Тождество $£_\xi\hat{\mathcal{L}}_G + (\xi^\mu\hat{\mathcal{L}}_G)_{,\mu} \equiv 0$, справедливое для $\hat{\mathcal{L}}_G$, как для скалярной плотности, преобразуется в главное тождество подхода КБЛ:

$$\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_G}{\partial g_{\rho\sigma;\mu}}g_{\rho\sigma;\nu} - \hat{\mathcal{L}}_G\delta^\mu_\nu\right)\xi^\nu +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_G}{\partial g_{\nu\tau;\mu}}g_{\nu(\tau}\delta^\rho_{\lambda)}\overline{g}^{\lambda\sigma}\right)\xi_{[\sigma,\rho]} +$$
$$+ 2\left(\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}_G}{\delta g_{\rho\sigma}}g_{\rho(\sigma}\delta^\mu_{\nu)} + \frac{\delta\hat{\mathcal{L}}_G}{\delta\overline{g}_{\rho\sigma}}\overline{g}_{\rho(\sigma}\delta^\mu_{\nu)}\right)\xi^\nu + \hat{\zeta}^\mu \equiv$$
$$\equiv \hat{I}^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv \hat{I}^{\mu\nu}{}_{,\nu}. \tag{10}$$

Производная Ли, например, от вектора ψ^α и вдоль векторного поля ξ^α определятся как $£_\xi\psi^\alpha \equiv -\xi^\beta\psi^\alpha{}_{;\beta} + \xi^\alpha{}_{;\beta}\psi^\alpha$. Разберем структуру выражения (10): первый член $(\hat{t}^\mu_\nu + (2\kappa)^{-1}\hat{l}^{\rho\sigma}\overline{R}_{\rho\sigma}\delta^\mu_\nu)\xi^\nu$ включает плотность канонического тензора энергии-импульса $\hat{t}^\mu_\nu$ для свободного гравитационного поля, второй член представлен сверткой плотности спина $\hat{\sigma}^{\mu\rho\sigma}$ с $\xi_{[\sigma;\rho]}$, третий член — это $\kappa^{-1}(\hat{G}^\mu_\nu - \overline{\hat{G}^\mu_\nu})\xi^\nu$ с тензором Эйнштейна G^μ_ν, четвертый член $\hat{\zeta}^\mu$ равен нулю, если ξ^ν — вектор Киллинга фона. Антисимметричная тензорная плотность $\hat{I}^{\mu\nu}$ справа (10) — это суперпотенциал КБЛ, обобщающий на произвольно искривленные фоны известный суперпотенциал Фрейда [22]. Все эти выражения могут быть найдены в работе [13]. Используя динамические $\hat{G}^\mu_\nu = \kappa\hat{T}^\mu_\nu$ и фоновые $\overline{\hat{G}^\mu_\nu} = \kappa\overline{\hat{T}^\mu_\nu}$ уравнения Эйнштейна КБЛ преобразовали тождество (10) в «слабый» закон сохранения для тока $\hat{I}^\mu$ $(\partial_\mu\hat{I}^\mu = 0)$:

$$\left[\hat{t}^\mu_\nu + (\hat{T}^\mu_\nu - \overline{\hat{T}^\mu_\nu}) + (2\kappa)^{-1}\hat{l}^{\rho\sigma}\overline{R}_{\rho\sigma}\delta^\mu_\nu\right]\xi^\nu +$$
$$+ \hat{\sigma}^{\mu\rho\sigma}\xi_{[\sigma,\rho]} + \hat{\zeta}^\mu \equiv \hat{I}^\mu = \hat{I}^{\mu\nu}{}_{,\nu}. \tag{11}$$

Для применения техники КБЛ в рамках полевого подхода нужно использовать разницу $\hat{g}^{\mu\nu} - \overline{\hat{g}^{\mu\nu}}$ вместо $\hat{l}^{\mu\nu}$. Тогда $-(2\kappa)^{-1}\hat{\mathcal{L}}^g$ — гравитационная часть (1), зависящая только от первых производных $\hat{l}^{\mu\nu}$, переходит в $\hat{\mathcal{L}}^{(2)}$ и выражается через лагранжиан КБЛ (9) как $\hat{\mathcal{L}}^{(2)} \equiv \hat{\mathcal{L}}_G - \hat{\mathcal{L}}^{(1)}$ с $\hat{\mathcal{L}}^{(1)} = -(2\kappa)^{-1}(\hat{g}^{\mu\nu} - \overline{\hat{g}}^{\mu\nu})\overline{R}_{\mu\nu}$. Затем мы преобразуем тождество $£_\xi\hat{\mathcal{L}}^{(2)} + (\xi^\mu\hat{\mathcal{L}}^{(2)})_{,\mu} \equiv 0$ в

$$\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_G}{\partial g_{\rho\sigma;\mu}}g_{\rho\sigma;\nu} - \hat{\mathcal{L}}_G\delta^\mu_\nu + \hat{\mathcal{L}}^{(1)}\delta^\mu_\nu - 2\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}^{(1)}}{\delta g_{\rho\sigma}}g_{\rho(\sigma}\delta^\mu_{\nu)}\right)\xi^\nu -$$
$$- \hat{\mathcal{M}}^{(2)\mu\rho}_\lambda\overline{g}^{\sigma\lambda}\xi_{\sigma;\rho} +$$
$$+ 2\left(\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}_G}{\delta g_{\rho\sigma}}g_{\rho(\sigma}\delta^\mu_{\nu)} + \frac{\delta\hat{\mathcal{L}}^{(2)}}{\delta\overline{g}_{\rho\sigma}}\overline{g}_{\rho(\sigma}\delta^\mu_{\nu)}\right)\xi^\nu \equiv$$

$$\equiv -\left(\hat{\mathcal{M}}_{\lambda}^{(2)\mu\nu}\xi^{\lambda}\right)_{,\nu}, \qquad (12)$$

где

$$\hat{\mathcal{M}}_{\lambda}^{(2)\mu\nu} \equiv -2\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}^{(2)}}{\partial g_{\rho\sigma;\mu}} g_{\rho(\sigma}\delta^{\nu}_{\lambda)} + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}^{(2)}}{\overline{g}_{\rho\sigma,\nu}}\overline{g}_{\rho(\sigma}\delta^{\nu}_{\lambda)}\right) \qquad (13)$$

и выражается через спиновый член (см. (10) и (11)) как

$$\hat{\mathcal{M}}_{\lambda}^{(2)\mu\nu}\overline{g}^{\lambda\rho} = \hat{\sigma}^{\rho[\mu\nu]} + \hat{\sigma}^{\mu[\rho\nu]} - \hat{\sigma}^{\nu[\rho\mu]}. \qquad (14)$$

Отмечая, что аргументами оператора $\hat{G}^{L}_{\mu\nu}$ в (6) могут быть как $\hat{g}^{\mu\nu}$, так и $\hat{l}^{\mu\nu}$, важно установить, что в уравнении (12):

$$2\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}^{(2)}}{\delta\overline{g}_{\rho\sigma}}\overline{g}_{\rho(\sigma}\delta^{\mu}_{\nu)} \equiv -\frac{1}{\kappa}\hat{G}^{L\mu}_{\nu}.$$

Вычитая уравнение (12) из выражения (10) и заменяя $\hat{g}^{\mu\nu}$ на $\hat{l}^{\mu\nu}$ в соответствии с (3), получаем тождество:

$$\frac{1}{\kappa}\hat{G}^{L\mu}_{\nu}\xi^{\nu} + \frac{1}{\kappa}\hat{l}^{\mu\lambda}\overline{R}_{\lambda\nu}\xi^{\nu} + \hat{\zeta}^{\mu}_{(*)} \equiv \hat{I}^{\mu\nu}_{(*);\nu} \equiv \hat{I}^{\mu\nu}_{(*),\nu} \qquad (15)$$

с новым суперпотенциалом $\hat{I}^{\mu\nu}_{(*)} = \hat{I}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{M}}_{\lambda}^{(2)\mu\nu}\overline{g}^{\lambda\rho}\xi_{\rho}$. Величина $\hat{\zeta}^{\mu}_{(*)} = \hat{\zeta}^{\mu} + \hat{\mathcal{M}}_{\lambda}^{(2)\mu\rho}\overline{g}^{\lambda\sigma}\xi_{(\sigma;\rho)}$ равна нулю на киллинговых векторах фона точно так же, как $\hat{\zeta}^{\mu}$ в (10) и (11).

Чтобы получить слабые законы сохранения, нужно подставить уравнения Эйнштейна (5) в тождество (15). Заметим, что величина $\hat{\Phi}^{L}_{\mu\nu}$, определенная выражением (7), исключается из (5). Действительно, подставляя (1) и (2) в определение (8), находим, что выражение (7) возникает также в правой части уравнений (5), и, таким образом, они переписываются как

$$\hat{G}^{L}_{\mu\nu} = \kappa\left(\hat{t}^{g}_{\mu\nu} + \delta\hat{t}^{M}_{\mu\nu}\right), \qquad (16)$$

$$\delta\hat{t}^{M}_{\mu\nu} \equiv 2\frac{\delta}{\delta\overline{g^{\mu\nu}}}\left[\hat{\mathcal{L}}^{M}\left(\overline{\Phi}^{A} + \phi^{A}, \overline{\hat{g}^{\mu\nu}} + \hat{l}^{\mu\nu}\right) - \overline{\hat{\mathcal{L}}^{M}}\right]. \qquad (17)$$

Подставляя уравнение (16) в (15), получаем

$$\left(\hat{t}^{g\mu}_{\nu} + \delta\hat{t}^{M\mu}_{\nu} + \kappa^{-1}\hat{l}^{\mu\lambda}\overline{R}_{\lambda\nu}\right)\xi^{\nu} + \hat{\zeta}^{\mu}_{(*)} \equiv$$
$$\equiv \hat{\mathcal{T}}^{\mu}_{(*)\nu}\xi^{\nu} + \hat{\zeta}^{\mu}_{(*)} \equiv \hat{I}^{\mu}_{(*)} = \hat{I}^{\mu\nu}_{(*),\nu}. \qquad (18)$$

Это дает закон сохранения $\partial_{\mu}\hat{I}^{\mu}_{(*)} = 0$ для тока $\hat{I}^{\mu}_{(*)}$. Он имеет место, первое, на произвольно искривленных фонах, включая все космологические решения; второе, для произвольных векторов смещений ξ^{μ}, а не только для векторов Киллинга; третье, мы представляем член $\kappa^{-1}\hat{l}^{\mu\lambda}\overline{R}_{\lambda\nu}$ (включенный в $\hat{\mathcal{T}}^{\mu}_{(*)\nu}$), который явно описывает взаимодействие с фоном; четвертое, также в уравнении (18) представлен новый суперпотенциал. Выражение для него получается из определения в тождестве (15) с использованием формулы (13) и суперпотенциала КБЛ и имеет вид

$$\hat{I}^{\mu\nu}_{(*)} = \kappa^{-1}\hat{l}^{\rho[\mu}\xi^{\nu]}{}_{;\rho} + \kappa^{-1}\left(\overline{g}^{\rho[\mu}\hat{l}^{\nu]\sigma} - \overline{g}^{\sigma[\mu}\hat{l}^{\nu]\rho}\right)_{;\sigma}\xi_{\rho}, \qquad (19)$$

где коэффициент при ξ_{ρ} — это ковариантизованный суперпотенциал Папапетру [23].

Итак, построение закона сохранения в виде выражения (18) решает одновременно проблемы (А) и (Б). Возникает вопрос: почему уравнение (18) оказалось успешным? Во-первых, вместо $\hat{t}^{m}_{\mu\nu}$ в уравнении (5) мы используем модифицированную плотность материального тензора энергии-импульса $\delta\hat{t}^{M}_{\mu\nu}$ в уравнении (16). Действительно, выражение (17) не следует стандартным способом из лагранжиана (1). Во-вторых, благодаря члену $\kappa^{-1}\hat{l}^{\mu\lambda}\overline{R}_{\lambda\nu}$ новая плотность полного тензора энергии-импульса $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{(*)}$ оказывается несимметричной на произвольно сложных фонах, в то время как прежде были попытки построить сохраняющиеся токи только с симметричным $\hat{t}^{(\mathrm{tot})}_{\mu\nu}$.

Сделаем замечания. 1. Токи и суперпотенциалы в работе [19] получены с использованием метода Белинфанте в законах сохранения [13]. Они точно совпадают с полученными здесь (18) и (19). Так, процедура Белинфанте оказывается «мостом», соединяющим два подхода в построении законов сохранения: канонический [13] и симметричный [4]. 2. Полевую формулировку ОТО можно построить с помощью разбиения $g_a = \overline{g}_a + h_a$ любой метрической переменной из набора $g_a \in g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, \sqrt{-g}g_{\mu\nu}, \ldots$ [21]. Тогда полевые уравнения, токи и суперпотенциалы принимают форму соответственно (5), (18) и (19) с заменой $\hat{l}^{\mu\nu}$ на $\hat{l}^{\mu\nu}_{a} = h_a(\partial\overline{\hat{g}}^{\mu\nu}/\partial\overline{g}_a)$. Использование разных $\hat{l}^{\mu\nu}_{a}$ ведет к неоднозначности, начиная со 2-го порядка по возмущениям, в определениях тензора энергии-импульса (что впервые отмечено в работе [24]) и суперпотенциала. С другой стороны, в [13, 19] построение токов и суперпотенциалов не зависит от выбора динамической переменной из набора g_a. Поэтому результаты [19], совпадая только с (18) и (19), разрешают эту неопределенность в пользу разбиения (3).

Автор очень благодарен Джозефу Кацу за обсуждения и рекомендации, а также Иржи Бичаку, Стивену Лау и Лацло Сшабадошу за объяснение их работ и дискуссии.

Литература

1. *Grishchuck L.P.* Current Topics in Astrofundamental Physics. Singapore, 1992. P. 435.
2. *Deser S.* // Gen. Relat. and Grav. 1970. **1**. P. 9.
3. *Bičák J.* Relativity and Gravitation. N. Y., 1971. P. 47.
4. *Grishchuck L.P., Petrov A.N., Popova A.D.* // Comm. Math. Phys. 1984. **94**. P. 379.
5. *Babak S.V., Grichshuk L.P.* // Phys. Rev. D. 2000. **61**. P. 24038.

6. *Pinto-Neto N., Silva R.R.* // Phys. Rev. D. 2000. **61**. P. 104002.
7. *Kopeikin S., Ramirez J., Mashhoon B., Sazhin M.* // Phys. Lett. A. 2001. **292**. P. 173.
8. *Ramirez J., Kopeikin S.* // Phys. Lett. B. 2002. **532**. P. 1.
9. *Pitts J.B., Schieve W.C.* // Gen. Relat. and Grav. 2001. **33**. P. 1319.
10. *Pitts J.B., Schieve W.C.* // Preprint arXiv: gr-qc/0111004.
11. *Чернин А.Д.* // Успехи физ. наук. 2001. **171**. С. 1153.
12. *Abbott L.F., Deser S.* // Nucl. Phys. B. 1982. **195**. P. 76.
13. *Katz J., Bičák J., Lynden-Bell D.* // Phys. Rev. D. 1997. **55**. P. 5759.
14. *Lau S.R.* // Phys. Rev. D. 1999. **60**. P. 104034.
15. *Deser S., Tekin B.* // Phys. Rev. D. 2003. **67**. P. 084009.
16. *Szabados L.B.* // Electronic J.: Living Reviews in Relativity. 2004. **7**. P. 4; www.livingreviews.org.
17. *Денен Г.* Эйнштейновский сборник: 1969–1970. М., 1970. С. 140.
18. *Владимиров Ю.С., Румяецев С.В.* // Изв. вузов. Физика. 1981. №12. С. 63.
19. *Petrov A.N., Katz J.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 2002. **458**. P. 319.
20. *Петров А.Н., Попова А.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. **28**, №6. С. 13 (Moscow University Phys. Bull. **42**, N 6. P. 13).
21. *Popova A.D., Petrov A.N.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1988. **3**. P. 2651.
22. *Freud P.* // Ann. of Math. Princet. 1939. **40**. P. 417.
23. *Papapetrou A.* // Proc. R. Irish Ac. 1948. **52**. P. 11.
24. *Boulware D.C., Deser S.* // Ann. of Phys. N.Y. 1975. **89**. P. 193.

Поступила в редакцию
30.05.03