УДК 530.145.7

КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ ГРУППОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ БОГОЛЮБОВА. II. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. Ю. Вернов, О. А. Хрусталев, М. В. Чичикина

(*НИИЯФ; кафедра теории поля и физики высоких энергий*)

E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru, khrust@goa.bog.msu.su, chich@hep.phys.msu.su

Для $(3+1)$-мерных систем, инвариантных относительно преобразований группы Пуанкаре, определяются групповые переменные Боголюбова, что позволяет провести квантование в окрестности нестационарного классического скалярного поля. Интегралы движения и операторы поля найдены с точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи.

Введение

В работе [1] были построены операторы координаты и импульса для $(K+1)$-мерной системы, инвариантной относительно L-параметрической группы Ли. В данной статье в качестве группы $\mathcal{G}$ рассматривается группа Пуанкаре. Для $(3+1)$-мерной Пуанкаре-инвариантной системы, описываемой Лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} f_{,\alpha}(\mathbf{x}) f_{,\beta}(\mathbf{x}) - G^2 V\left(\frac{f}{G}\right), \qquad (1)$$

где

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x), \quad f_{,\alpha} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha},$$

$$g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1),$$

и соответствующим уравнением Лагранжа–Эйлера:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + G \frac{dV(f/G)}{df} = 0,$$

строится схема квантования в окрестности классического поля. При этом скалярная классическая составляющая $F(\mathbf{x})$ должна удовлетворять следующему условию: существует пространственноподобная гиперплоскость C размерности $K-1$, такая что при $\mathbf{x} \in C$ выполняется: $F(\mathbf{x}) = 0^{*)}$.

1. Теория возмущений и интегралы движения

В качестве 10 линейно независимых интегралов движения можно выбрать следующие $(\alpha < \beta)^{**)}$:

$$\mathcal{P}^\beta = \int \Theta^{0\beta} \, dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta} = \int \left(\Theta^{0\alpha} x^\beta - \Theta^{0\beta} x^\alpha\right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

где $\Theta^{\alpha\beta} = (\partial\mathcal{L}/\partial f_{,\alpha})(\partial f/\partial x_\beta) - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}$.

Пусть C — пространственноподобная гиперплоскость, заданная некоторым уравнением в координатах $\mathbf{x}'$. С помощью преобразования Пуанкаре можно перейти в систему координат $\mathbf{x}''$, в которой поверхность C будет определяться уравнением $t'' = 0$, поэтому, не ограничивая общности, можно выбрать в качестве поверхности C гиперплоскость $t' = 0$ и $\lambda'^k = x'^k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t'}$.

Проведем квантование, заменяя $f(\boldsymbol{\lambda}')$ и $f_{,\alpha}(\boldsymbol{\lambda}')$ на операторы

$$f(\boldsymbol{\lambda}') \longrightarrow \hat{q}(\mathbf{x}(0, x', \tau)) \equiv q(0, x'),$$

$$f_{,k}(\boldsymbol{\lambda}') \longrightarrow \hat{q}_{,k}(0, x'), \quad f_{,0}(\boldsymbol{\lambda}') \longrightarrow \hat{p}(0, x').$$

Теперь интегралы движения являются рядами по $\frac{1}{G}$:

$$O^a = G^2 O^a_{-2} + G O^a_{-1} + O^a_0 + \ldots \quad a = 1, 2, \ldots, 10.$$

Используя формулы (15) и (16) статьи [1], выпишем первые слагаемые разложения гамильтониана$^{*)}$ $(\mathcal{H} \equiv \mathcal{P}^0)$:

$$\mathcal{H}_{-2} = \int\limits_C \left(\frac{1}{2}(F_{,0}^2 + F_{,1}^2 + F_{,2}^2 + F_{,3}^2) + V(F)\right) d^3S,$$

$$\mathcal{H}_{-1} = \int\limits_C \left(\frac{1}{2}(F_{,0}\hat{P} + F_{,1}\hat{Q}_{,1} + F_{,2}\hat{Q}_{,2} + F_{,3}\hat{Q}_{,3}) + V'(F)\hat{Q}\right) d^3S,$$

$$\mathcal{H}_0 = \int\limits_C \left(\frac{1}{2}\hat{P}^2 + F_{,0}\hat{A}_{,0} + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\hat{Q}_{,k}^2 + F_{,k}\hat{A}_{,k}\right) + V'(F)\hat{A} + \frac{1}{2}V''(F)\hat{Q}^2\right) d^3S.$$

Так как $F(\mathbf{x}(\mathbf{x}', \tau))$ является числовой функцией, а не оператором, то интегралы O^a_{-2} сводятся к числам, а интегралы O^a_{-1} оказываются линейными по операторам u, u_n, $\frac{\delta}{\delta u}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n}$. У этих операторов нет нормируемых собственных векторов, следовательно, для построения регулярной теории возмущений необходимо обратить все O^a_{-1} в нуль.

$^{*)}$ В работе [2] на $F(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in C$ накладывались два условия: нормальная производная $F_n(\mathbf{x}) = 0$, а вторая нормальная производная $F_{nn}(\mathbf{x})$ пропорциональна $F(\mathbf{x})$.

$^{**)}$ Следует отметить, что интегралы $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ не являются трансляционно-инвариантными. При смещении начала координат на τ^μ величина $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ меняется на $\tau^\beta\mathcal{P}^\alpha - \tau^\alpha\mathcal{P}^\beta$.

$^{*)}$ $F_{,\alpha} \equiv \frac{\partial F}{\partial x'^\alpha}$, $Q_{,\alpha} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x'^\alpha}$ и $A_{,\alpha} \equiv \frac{\partial A}{\partial x'^\alpha}$.

Пусть выполняются соотношения $F_{,\alpha}(0,x') = cv_{,\alpha}(0,x')$ и $F_{,\alpha 0}(0,x') = cv_{,\alpha 0}(0,x')$, где c — произвольная константа, и граничные условия $F_{,\alpha}\hat{Q}|_{\partial C} = 0$ и $x'^{\alpha} F_{,\beta}\hat{Q}|_{\partial C} = 0$. Поскольку F — решение уравнения:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 F(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}} + V'(F) = 0, \tag{2}$$

то, интегрируя по частям, получаем, что во всех интегралах O^a_{-1} суммы линейных по $\frac{\delta}{\delta u}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n}$ членов оказываются пропорциональными левым частям формул (12) статьи [1] и, следовательно, равными нулю. Все операторы O^a_{-1} могут быть представлены в виде*):

$$O^a_{-1} = c\int\limits_C \left(M_a\left(u_n + \tilde{N}^b_n r_b\right) - M_{an}\left(u + \tilde{N}^b r_b\right)\right) d^3S, \tag{3}$$

при этом индекс a нумерует интегралы движения в следующем порядке: $a=0$ соответствует $\mathcal{H}$, далее следуют $\mathcal{P}^k$, $\mathcal{M}^{0j}$ и $\mathcal{M}^{kj}$. Функции M_a определены формулой (3) статьи [1].

Интегралы $r_a \equiv R^b_a J_b$ являются линейными функционалами от u и u_n. Подставляя явный вид функционалов R^b_a, формула (7) статьи [1], легко получить, что в (3) линейные по u и u_n члены обратятся в нуль при $v(0,x') = -\tilde{N}^a(0,x')J_a$. Тогда из формулы (16) статьи [1] следует, что $c = \sqrt{2}$. Таким образом,

$$\begin{gathered} v(0,x') = -\tilde{N}^a(0,x')J_a = \tfrac{1}{\sqrt{2}}F(0,x') \Longrightarrow \\ \Longrightarrow F(0,x') = -\sqrt{2}\tilde{N}^a(0,x')J_a. \end{gathered} \tag{4}$$

Из (4) и формул (2) и (5) статьи [1] следует: $J_a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega(F, M_a)$.

До сих пор наше рассмотрение касалось только поверхности C. Теперь распространим его на все пространство. Пусть $v(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) = \frac{1}{\sqrt{2}}F(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))$, тогда из (2) следует, что функции $M_a(\mathbf{x},\tau)$ являются решениями уравнения

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 M_a(\mathbf{x},\tau)}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}} + V''(F)\cdot M_a(\mathbf{x},\tau) \equiv \hat{L}M_a(\mathbf{x},\tau) = 0. \tag{5}$$

2. Определение функций $\tilde{N}^a$

До настоящего момента значения функций $\tilde{N}^a(\mathbf{x},\tau)$ не определены. Покажем, что если $\tilde{N}^a$ являются решениями уравнения (5) и удовлетворяют определенным граничным условиям на бесконечности трехмерного пространства, например обращаются в нуль вместе со всеми своими производными первого порядка, то условия, фиксирующие явный вид преобразования Боголюбова, не зависят от выбора поверхности интегрирования.

*) В (3) в выражениях для $\mathcal{M}^{\alpha\beta}_{-1}$ не выписаны члены $\tau^{\alpha}\mathcal{P}^{\beta}_{-1} - \tau^{\beta}\mathcal{P}^{\alpha}_{-1}$, так как они обращаются в нуль автоматически, если все $\mathcal{P}^{\alpha}_{-1} = 0$.

Действительно, пусть $\tilde{C}$ — пространственноподобная гиперплоскость. Область пространства-времени S, ограниченная гиперплоскостями C и $\tilde{C}$, обладает границей $\partial S = C + \tilde{C} + \partial\tilde{S}$. При этом поверхность $\partial\tilde{S}$ находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства. Наложим на функции $\tilde{N}^a$ и M_b такие граничные условия, чтобы $\int\limits_{\partial\tilde{S}} (\tilde{N}^a M_{bn} - M_b\tilde{N}^a_n)\, dS = 0$.

Функции M_b — решения уравнения (5), если $\tilde{N}^a$ также являются решениями данного уравнения, то, используя формулу Грина, получаем, что интеграл по границе области S равен нулю:

$$\begin{aligned} &\oint\limits_{\partial S} (\tilde{N}^a M_{bn} - M_b\tilde{N}^a_n)\, d^3S = \\ &= \int\limits_S (\tilde{N}^a\hat{L}M_b - M_b\hat{L}\tilde{N}^a)\, d^4S = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

и условия (5) статьи [1] не зависят от выбора поверхности интегрирования.

Потребуем, чтобы функция $u(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))$ являлась решением уравнения (5), тогда заданием граничных условий можно добиться выполнения условий (6) статьи [1] на любой пространственноподобной гиперплоскости. Изменение значений параметров τ^a в аргументах функций $\tilde{N}^a$, M_a и u приводит к переходу от интегрирования по одной пространственноподобной гиперплоскости к интегрированию по другой, возможно, совпадающей с исходной. Следовательно, если условия (5) и (6) статьи [1] выполняются при хотя бы одном значении параметров τ^a, то они выполняются при любых τ^a.

Функция $F(\mathbf{x})$ обращается в нуль на некоторой пространственноподобной гиперплоскости. Выберем τ^a так, чтобы $F(\mathbf{x}(0,x',\tau)) = 0$. Так как $F(0,x') = 0$, то $F_{,k}(0,x') = 0$ и $F_{,kk}(0,x') = 0$ $(k = 1,2,3)$. Из (2) и условия $V'(0) = 0$ следует, что $F_{,00}(0,x') = 0$. Данный выбор удобен тем, что $\forall a$ либо $M^a(0,x')$, либо $M^a_n(0,x')$ тождественно равно нулю.

Пусть функция $F(0,x')$ является либо четной, либо нечетной, тогда нетрудно получить что $J_a = 0$ при $a \neq 0$. Следовательно, $\tilde{N}^0(0,x') = \frac{\sqrt{2}}{\int\limits_C F^2_{,0}\, d^3S}F(0,x') = 0$ и $\tilde{N}^0_n(0,x') = \frac{\sqrt{2}}{\int\limits_C F^2_{,0}\, d^3S}F_{,0}(0,x')$.

Так как $\tilde{N}^a(\mathbf{x}',\tau)$ являются решениями уравнения (5), то для их определения достаточно задать значения $\tilde{N}^a$ и $\tilde{N}^a_n$ на поверхности C. Пусть

$$\begin{aligned} &\tilde{N}^0(0,x') = 0; && \tilde{N}^0_n(0,x') = B_0F_{,0};\\ &\tilde{N}^1(0,x') = -B_1F_{,01}; && \tilde{N}^1_n(0,x') = 0;\\ &\tilde{N}^2(0,x') = -B_2F_{,02}; && \tilde{N}^2_n(0,x') = 0;\\ &\tilde{N}^3(0,x') = -B_3F_{,03}; && \tilde{N}^3_n(0,x') = 0; \end{aligned}$$

$$\tilde N^4(0,x')=0;\qquad \tilde N^4_n(0,x')=B_4\Big(x'^1F_{,0}-D_1F_{,01}\Big);$$
$$\tilde N^5(0,x')=0;\qquad \tilde N^5_n(0,x')=B_5\Big(x'^2F_{,0}-D_2F_{,02}\Big);$$
$$\tilde N^6(0,x')=0;\qquad \tilde N^6_n(0,x')=B_6\Big(x'^3F_{,0}-D_3F_{,03}\Big);$$
$$\tilde N^7(0,x')=B_7\Big(x'^2F_{,01}-x'^1F_{,02}\Big);\qquad \tilde N^7_n(0,x')=0;$$
$$\tilde N^8(0,x')=B_8\Big(x'^1F_{,03}-x'^3F_{,01}\Big);\qquad \tilde N^8_n(0,x')=0;$$
$$\tilde N^9(0,x')=B_9\Big(x'^3F_{,02}-x'^2F_{,03}\Big);\qquad \tilde N^9_n(0,x')=0.$$

Численные параметры D_k и B_a определяются соотношениями (5) статьи [1].

3. Редукция числа состояний и нулевой порядок по G

При получении выражений (8) статьи [1] для переменных Боголюбова как функционалов исходных полевых переменных мы рассматривали функции $f(\mathbf{x}')$ и $f_n(\mathbf{x}')$ как независимые, тем самым удвоив число состояний поля. Это привело к удвоению числа всех независимых переменных, включая и переменные Боголюбова, поэтому для приведения количества состояний поля к исходному редукцию числа состояний необходимо проводить на функциях, удовлетворяющих не 10, а 20 дополнительным условиям.

Функции $\tilde N^a$ выбраны так, что $\forall a$ либо $\tilde N^a(0,x')$, либо $\tilde N^a_n(0,x')$ тождественно равны нулю. Таким образом, одна часть условий (6) статьи [1] ограничивает поведение u, а другая часть — поведение u_n. Легко видеть, что u и u_n должны удовлетворять различным условиям, что затрудняет редукцию числа состояний. Дополнительные 10 условий удобно выбрать следующим образом: рассмотрим функции $w(\mathbf{x}',\tau)$ такие, что

$$\forall a=0,\dots,L-1:\omega(M_a,w)=0,\quad \omega(\tilde N^a,w)=0. \tag{7}$$

Используя явный вид функций $\tilde N^a$ и M_a, легко показать, что функции $w(0,x')$ и $w_n(0,x')$ подчиняются одинаковым дополнительным условиям:

$$\int \tilde N^a(0,x')w(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int \tilde N^a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int \tilde N^a_n(0,x')w(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int \tilde N^a_n(0,x')w_n(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int M_a(0,x')w(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int M_a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int M_{an}(0,x')w(0,x')\,d^3S=0,$$
$$\int M_{an}(0,x')w_n(0,x')\,d^3S=0.$$

Так как
$$r_a\equiv R^b_aJ_b=J_b\omega(\tilde N^b_a,u)=-\omega(M_a,u),$$
то
$$w(0,x')=u(0,x')-\tilde N^a(0,x')r_a,$$
$$w_n(0,x')=u_n(0,x')-\tilde N^a_n(0,x')r_a,$$
в остальных точках пространства функция w определяется как решение уравнения (5).

Чтобы компенсировать появление новых условий, ограничивающих поведение функций $w(\mathbf{x}',\tau)$ и $w_n(\mathbf{x}',\tau)$, будем считать r_a независимыми переменными. Переменные r_a не имеют физического смысла. Их происхождение связано с редукцией пространства состояний в терминах переменных Боголюбова. При рассмотрении интегралов движения в нулевом порядке эти избыточные переменные будут удалены соответствующим выбором векторов состояния.

Производные по $w(\boldsymbol\lambda)$ и $w_n(\boldsymbol\lambda)$ связаны соотношениями
$$\int\limits_C\left(M_a\frac{\delta}{\delta w}+M_{an}\frac{\delta}{\delta w_n}\right)d^3S=0$$
и
$$\int\limits_C\left(\tilde N^a\frac{\delta}{\delta w}+\tilde N^a_n\frac{\delta}{\delta w_n}\right)d^3S=0.$$

В терминах новых переменных производные по $u(\boldsymbol\lambda)$ и $u_n(\boldsymbol\lambda)$ суть:
$$\frac{\delta}{\delta u(\boldsymbol\lambda)}=\frac{\delta}{\delta w(\boldsymbol\lambda)}+\frac{\delta r_a}{\delta u(\boldsymbol\lambda)}\frac{\partial}{\partial r_a}$$
и
$$\frac{\delta}{\delta u_n(\boldsymbol\lambda)}=\frac{\delta}{\delta w_n(\boldsymbol\lambda)}+\frac{\delta r_a}{\delta u_n(\boldsymbol\lambda)}\frac{\partial}{\partial r_a},$$
где
$$\frac{\delta r_a}{\delta u}=-M_{an}+\omega(M_a,M_b)\tilde N^b_n$$
и
$$\frac{\delta r_a}{\delta u_n}=M_a-\omega(M_a,M_b)\tilde N^b.$$

Необходимую редукцию числа состояний осуществим выбором векторов состояния в форме $\Phi[w,w_n]=\exp\Big(-i\int w_nw\,d^3S\Big)\breve\Phi[w]$, тогда
$$\frac{\delta}{\delta w(\boldsymbol\lambda)}\longrightarrow\frac{\delta}{\delta w(\boldsymbol\lambda)}-iw_n(\boldsymbol\lambda),\qquad \frac{\delta}{\delta w_n(\boldsymbol\lambda)}\longrightarrow -iw(\boldsymbol\lambda).$$

Схема удаления избыточных переменных r_a и вычисления интегралов движения в нулевом порядке по G, рассмотренная в статье [2] для случая $(1+1)$-мерной теории скалярного поля, применима и в случае $(3+1)$-мерной теории. В результате получаем:

$$\mathcal{H}_0 = i\frac{\partial}{\partial\tau^0}, \quad \mathcal{M}_0^{0k} = i\left(\frac{\partial}{\partial\tau^{3+k}} - \tau^0\frac{\partial}{\partial\tau^k} - \tau^k\frac{\partial}{\partial\tau^0}\right),$$

$$\mathcal{P}_0^k = -i\frac{\partial}{\partial\tau^k}, \; \mathcal{M}_0^{kj} = i\left(\frac{\partial}{\partial\tau^{4+k+j}} + \tau^k\frac{\partial}{\partial\tau^j} - \tau^j\frac{\partial}{\partial\tau^k}\right).$$

Данные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов группы Пуанкаре и порождают алгебру Ли данной группы.

Оператор поля $\phi(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))$ имеет вид:

$$\phi(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) = GF(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) + \hat{\psi}(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) + \\ + \frac{\delta r_a}{\delta u_n}\frac{\partial}{\partial r_a} + \frac{1}{G}\hat{A} + \mathcal{O}(G^{-2}),$$

где $\hat{\psi}(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta}\dfrac{\partial^2\hat{\psi}(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} + V''(F)\hat{\psi}(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau)) = 0, \\ \hat{\psi}(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))|_C = \sqrt{2}w(\boldsymbol{\lambda}), \quad \hat{\psi}_t(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tau))|_C = \sqrt{2}w_t(\boldsymbol{\lambda}). \end{cases}$$

Заключение

В настоящей работе было проведено квантование вблизи классического поля, нетривиально зависящего от времени. Применение преобразования Боголюбова позволило использовать в качестве независимых переменных параметры группы Пуанкаре и построить теорию возмущений, не нарушая законов сохранения. С точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи найдены значения для интегралов движения и оператора поля. Таким образом, дано полностью релятивистски инвариантное описание $(3+1)$-мерной квантовой системы с ненулевой классической компонентой. Данная схема может быть применена при квантовании около классических решений, периодических по времени, например двойных (пульсирующих) солитонов или стоячих волн.

Работа выполнена при поддержке грантами Президента России (НШ-1450.2003.2 и НШ-1685.2003.2) и научной программой «Университеты России» (гранты УР.02.03.002 и УР.02.03.028).

Литература

1. *Вернов С.Ю., Хрусталев О.А., Чичикина М.В* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. №1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2004. N 1).
2. *Хрусталев О.А., Чичикина М.В.* // ТМФ. 1997. **111**. С. 242; С. 413.

Поступила в редакцию
21.04.03