УДК 517.958; 621.372.8

ЛОВУШЕЧНЫЕ МОДЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЛНОВОДЕ СО ВСТАВКОЙ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Е. Локштанова

(*кафедра математики*)

E-mail: loksch@afrodita.phys.msu.ru

Рассматривается спектральная задача для системы уравнений Максвелла в бесконечном полом цилиндрическом волноводе с локальной вставкой. Для случая, когда параметры среды во вставке зависят только от продольной координаты, показано существование бесконечной последовательности ловушечных мод.

Рассмотрим задачу о существовании ловушечных мод в волноводе постоянного сечения с диэлектрической вставкой. Волновод представляет собой бесконечный цилиндр постоянного сечения $Q=\Omega\times(-\infty,\infty)$ с проводящими стенками. Заполнение волновода локально-неоднородно

$$\varepsilon\Big|_{\substack{z\leqslant z_1,\\ z\geqslant z_2}}\equiv 1,\quad \varepsilon\Big|_{z_1<z<z_2}\geqslant 1,$$

причем найдется область, где $\varepsilon>1$. Ограничим рассмотрение частным случаем, когда диэлектрическая проницаемость во вставке зависит только от продольной координаты $\varepsilon=\varepsilon(z)$.

Задача сводится к исследованию вопроса о существовании классического решения уравнений

$$\begin{cases}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=k^2\mathbf{E},\\ \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}=0,\end{cases}\tag{1}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{cases}\mathbf{E}\times\mathbf{n}\Big|_{\partial Q}=0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{n}\Big|_{\partial Q}=0\end{cases}\tag{2}$$

и условиям сопряжения на возможных поверхностях разрыва ε.

Если существуют вещественные k и $E\in L_2(Q)$, являющиеся решением задачи (1)–(2), то такое решение называется ловушечной модой.

В полом волноводе ($\varepsilon\equiv 1$) поле можно представить в виде (см. [1])

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\chi\mathbf{e}_z.$$

Будем искать частные решения задачи (1)–(2) в аналогичном виде:

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z.\tag{3}$$

Подставляя вектор $\mathbf{E}$, имеющий вид (3), в уравнение (1), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z=\varepsilon k^2\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z-\Delta\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z=\varepsilon k^2\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z,$$

$$-\Delta\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z=k^2\varepsilon(z)\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z=k^2\operatorname{rot}\varepsilon(z)\psi\mathbf{e}_z.$$

Заметим, что

$$\Delta\operatorname{rot}\psi\mathbf{e}_z=\operatorname{rot}\Delta\psi\mathbf{e}_z,$$

откуда

$$-\operatorname{rot}(\Delta\psi\mathbf{e}_z)=\operatorname{rot}\left(k^2\varepsilon(z)\psi\mathbf{e}_z\right).$$

Для доказательства существования ловушечных мод достаточно найти какие-нибудь частные решения задачи (1)–(2). Поэтому достаточно рассмотреть уравнение

$$-\Delta\psi=k^2\varepsilon(z)\psi\tag{4}$$

в пространстве $\psi\in L_2$ с граничным условием $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0$. Условие Неймана следует из граничного условия $\mathbf{E}\times\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega}=0$.

Поскольку коэффициент $\varepsilon(z)$ не зависит от поперечных координат, будем искать решение задачи (4) в виде $\psi(x,y,z)=\varphi(x,y)Z(z)$, где $\varphi=\varphi_n$ — собственные функции задачи

$$\begin{cases}-\Delta\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\quad (x,y)\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\mathbf{n}}=0.\end{cases}$$

Эта задача имеет счетное множество собственных значений λ_n, бесконечно растущих с номером n. Каждому из них соответствует задача для $Z_n(z)$

$$-Z_n''-k^2\varepsilon Z_n+\lambda_n Z_n=0,\quad z\in(-\infty,\infty),\tag{5}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}\varepsilon(z)\geqslant 1, & z\in(z_1,z_2),\\ \quad 1, & z\notin(z_1,z_2).\end{cases}$$

Непрерывный спектр каждой из этих задач расположен на полупрямой $k^2\geqslant\lambda_n$.

Покажем, что у каждой из задач для $Z_n(z)$ есть хотя бы одно собственное значение, расположенное ниже границы ее непрерывного спектра. Доказательство проведем на основе метода, использованного ранее в работе [2].

Заменим задачу на бесконечной прямой соответствующей задачей на отрезке (z_1,z_2) с условиями излучения на границах. В данном случае условия излучения принимают вид:

$$Z_n(z) = Ae^{\sqrt{\lambda_n - k^2}\, z}, \qquad z < z_1,$$
$$Z_n(z) = Be^{-\sqrt{\lambda_n - k^2}\, z}, \quad z > z_2,$$

откуда, продифференцировав по z, получаем граничные условия 3-го рода на сечениях z_1 и z_2:

$$\begin{aligned} \left(Z_n' - \sqrt{\lambda_n - k^2}\, Z_n\right)\Big|_{z=z_1} = 0,\\ \left(Z_n' + \sqrt{\lambda_n - k^2}\, Z_n\right)\Big|_{z=z_2} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Перейдем к слабой постановке задачи (5–6), рассматривая ее в пространстве H^1. Для этого умножим уравнение (5) на произвольный вектор $\mathbf{X} \in C^1$, удовлетворяющий граничным условиям (6), и проинтегрируем по отрезку (z_1, z_2):

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} Z'(z)X'(z)\,dz - Z'(z_2)X(z_2) + Z'(z_1)X(z_1) = \\ = \int\limits_{z_1}^{z_2} (k^2\varepsilon(z) - \lambda_n)Z(z)X(z)\,dz,$$

или с учетом условий (6) при z_1 и z_2

$$\begin{aligned} \int\limits_{z_1}^{z_2} Z'(z)X'(z)\,dz + \sqrt{\lambda_n - k^2}\times \\ \times (X(z_1)Z(z_1) + X(z_2)Z(z_2)) = \\ = \int\limits_{z_1}^{z_2} (k^2\varepsilon(z) - \lambda_n)Z(z)X(z)\,dz. \end{aligned} \tag{7}$$

Зафиксируем положительное $k < \lambda$ в граничных условиях, а в уравнении (7) заменим k^2 новым спектральным параметром μ

$$\begin{aligned} \int\limits_{z_1}^{z_2} Z'(z)X'(z)\,dz + \sqrt{\lambda_n - k^2}\times \\ \times (X(z_1)Z(z_1) + X(z_2)Z(z_2)) = \\ = \int\limits_{z_1}^{z_2} (\mu\varepsilon(z) - \lambda_n)Z(z)X(z)\,dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Для каждого k существуют значения μ, при которых задача (8) разрешима ([3]). Возьмем наименьшее такое собственное значение μ и исследуем зависимость $\mu(k)$. Если существует k_0 такое, что $\mu(k_0) = k_0^2$, то $k = k_0$ доставляет решение задаче (5)–(6), т. е. является ее собственным значением.

Если Z и μ разрешают задачу (8), то для них справедливо

$$\begin{aligned} \int\limits_{z_1}^{z_2} (Z'(z))^2\,dz + \sqrt{\lambda_n - k^2}\left(Z^2(z_1) + Z^2(z_2)\right) = \\ = \int\limits_{z_1}^{z_2} (\mu\varepsilon(z) - \lambda_n)Z^2(z)\,dz. \end{aligned} \tag{9}$$

Продифференцируем (9) по k:

$$2\int\limits_{z_1}^{z_2} Z'\,\frac{\partial Z'}{\partial k}\,dz - \frac{2k}{\sqrt{\lambda_n - k^2}}\left(Z^2(z_1) + Z^2(z_2)\right) = \\ = 2\int\limits_{z_1}^{z_2} (\mu\varepsilon - \lambda_n)Z\frac{\partial Z}{\partial k}\,dz + \frac{\partial \mu}{\partial k}\int\limits_{z_1}^{z_2} \varepsilon Z^2\,dz.$$

Учитывая, что Z разрешает (8) для любой функции X, в том числе для $X = \dfrac{\partial Z}{\partial k}$, получим

$$-\frac{2k}{\sqrt{\lambda_n - k^2}}\left(Z^2(z_1) + Z^2(z_2)\right) = \frac{\partial \mu}{\partial k}\int \varepsilon Z^2\,dz,$$

откуда видно, что $\dfrac{\partial \mu}{\partial k} < 0$ при $0 < k < \sqrt{\lambda_n}$. Очевидно $\mu(0) > 0$. Оценим $\mu(k)$ при $k^2 = \lambda_n$. Так как μ — наименьшее собственное значение задачи (8), его можно определить как нижнюю грань функционала

$$\mu = \inf_{Z\in H^1}\left\{\left[\int (Z')^2\,dz + \lambda_n\int Z^2\,dz + \right.\right. \\ \left.\left. + \sqrt{\lambda_n - k^2}\left((Z^2(z_1) + Z^2(z_2)\right)\right]\left[\int \varepsilon(z)Z^2\,dz\right]^{-1}\right\}$$

по всем возможным $Z(z) \in H^1$. Возьмем $Z(z) = \mathrm{const}$. Тогда для $k^2 = \lambda_n$ получим

$$\mu_{\min} \leqslant \frac{\lambda_n}{\int\limits_{z_1}^{z_2} \varepsilon(z)\,dz} < \lambda_n,$$

так как $\varepsilon(z) > 1$ на интервале (z_1, z_2).

Таким образом, $\mu(k)$ на отрезке $k \in (0, \sqrt{\lambda_n})$ монотонно убывает от $\mu(0) > 0$ до $\mu_{\min} < \lambda_n$. Следовательно, в какой-то точке $k_0 \in (0, \sqrt{\lambda_n})$ кривые $\mu(k)$ и k^2 пересекаются и $\mu(k_0) = k_0^2$.

Итак, у каждой из задач (5) для $Z(z)$ существует собственное значение, лежащее левее непрерывного спектра $k^2 \in [\lambda_n, \infty)$. Спектр σ_{cont} задачи (4) содержит в себе спектры всех задач (5), то есть

$$[\lambda_n, \infty) \subset [\lambda_1, \infty) \subseteq \sigma_{\mathrm{cont}}$$

а собственные значения (5) являются собственными значениями (4).

Известно, что у подобных задач с локальным возмущением коэффициентов не может быть конечной точки сгущения собственных значений (см., напр., [4, 5]). Значит, собственные значения всех задач для Z начиная с какого-то номера n будут погружены в непрерывный спектр задачи (4) для ψ и тем более исходной задачи (1) для поля $\mathbf{E}$.

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
2. *Делицын А.Л.* // ЖВММФ. 2000. **40**, №4. С. 616.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
4. *Глазман И.М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963.
5. *Jones D.S.* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953. **49**. P. 668.

Поступила в редакцию
09.07.03