УДК 517.957; 512.81

# О НЕТЕРОВЫХ СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЙ ТОДЫ

**А. В. Киселев**

(*кафедра математики*)

E-mail: arthemy@mccme.ru

**Получено описание класса нетеровых симметрий двумеризованных уравнений Тоды, порожденного компонентами тензора энергии–импульса этих уравнений.**

В данной работе рассматриваются геометрические свойства двумеризованных уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ [1]: именно, построено описание класса их нетеровых симметрий $\varphi_{\mathcal{L}}$, соответствующего компонентам $T$, $\bar{T}$ тензора энергии–импульса $\Theta = T\,\mathrm{d}x + \bar{T}\,\mathrm{d}y$ для уравнений $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$, а также функциональной оболочке их дифференциальных следствий. Отправной точкой рассуждений служит работа [2], в которой изучалась взаимосвязь симметрий $\varphi$, нетеровых симметрий $\varphi_{\mathcal{L}}$ и сохраняющихся токов $\eta$ для скалярного гиперболического уравнения Лиувилля $u_{xy} = \exp(u)$; реализованная в указанной работе схема обобщена на многомерный случай $r$-компонентных уравнений Тоды, ассоциированных с невырожденной симметризуемой матрицей $K$, в общем случае не являющейся матрицей Картана [1] комплексной полупростой алгебры Ли.

Используемые ниже обозначения соответствуют работам [2–4]. Краткий обзор основных понятий из геометрии УрЧП [3] содержится в работе [5].

**1.** Пусть $K = \|k_{ij},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant r\|$ — невырожденная $(r\times r)$-матрица, а $K^{-1} = \|k^{ij}\|$ — обратная к ней матрица. Двумеризованные гиперболические уравнения Тоды имеют вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}} = \Big\{F_i \equiv u^i_{xy} - \exp(\sum_{j=1}^{r} k_{ij}u^j) = 0,\quad 1 \leqslant i \leqslant r\Big\}. \tag{1}$$

Пусть существует такой набор чисел $\{a_i \neq 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$, что построенная с его помощью матрица $\kappa = \|\kappa_{ij}\|$, элементы которой равны $\kappa_{ij} = a_i \cdot k_{ij}$, симметрична: $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$. В частности, если $\mathfrak{g}$ — это полупростая алгебра Ли ранга $r$, $\{\alpha_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ — система простых корней, $K = \|k_{ij} = 2(\alpha_i,\alpha_j) \times |\alpha_j|^{-2},\ 1 \leqslant i,j \leqslant r\|$ — матрица Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то положим $a_i = |\alpha_i|^{-2}$; тогда $\kappa_{ij} = 2(\alpha_i,\alpha_j) \times |\alpha_i|^{-2}\cdot|\alpha_j|^{-2} = \kappa_{ji}$. Согласно [1], назовем такие уравнения Тоды (1) ассоциированными с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

Уравнения Тоды $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$ являются лагранжевыми в следующем смысле: рассмотрим действие $\mathcal{L}_{\mathrm{Toda}} = \int L_{\mathrm{Toda}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ с плотностью

$$L_{\mathrm{Toda}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\kappa_{ij}u^i_x u^j_y - \sum_{i=1}^{r} a_i\cdot\exp\Big(\sum_{j=1}^{r}k_{ij}u^j\Big),$$

тогда уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\mathbf{E}_u(\mathcal{L}_{\mathrm{Toda}}) = \kappa\cdot F = 0 \tag{2}$$

эквивалентны уравнениям (1), если матрица $\kappa$ не вырождена.

Условимся, что в дальнейшем будем рассматривать любые структуры для уравнений (1) с точностью до дискретной симметрии $x \leftrightarrow y$.

Уравнения Тоды гамильтоновы относительно оператора $A_1 = \kappa^{-1}\cdot D_y^{-1}$ и гамильтониана $\mathcal{H}_{\mathrm{Toda}} = \int H_{\mathrm{Toda}}\,\mathrm{d}y$ с плотностью

$$H_{\mathrm{Toda}} = \Big\langle\frac{\partial L_{\mathrm{Toda}}}{\partial u_x}, u_x\Big\rangle - L_{\mathrm{Toda}} = \sum_{i=1}^{r} a_i\cdot\exp\Big(\sum_{j=1}^{r}k_{ij}u^j\Big).$$

В самом деле,

$$u_x = A_1\circ\mathbf{E}_u(\mathcal{H}_{\mathrm{Toda}}), \tag{3}$$

(см. также [4]). Легко проверить, что плотность гамильтониана $H$ всегда сохраняется на соответствующем гамильтоновом эволюционном уравнении $\dot{u} = A\circ\mathbf{E}(\int H\,\mathrm{d\,vol})$, поскольку гамильтоновы операторы кососопряжены: $A^* = -A$; для уравнения (3) имеем

$$\bar{D}_y\Big(\sum_{i=1}^{r}a_i u^i_{xx}\Big) = \bar{D}_x(H_{\mathrm{Toda}}) = \bar{D}_y\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\kappa_{ij}u^i_x u^j_x\Big),$$

где $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_y$ — полные производные $D_x$ и $D_y$ по $x$ и $y$ соответственно, ограниченные на $\mathcal{E}_{\mathrm{Toda}}$. Таким образом, при любой невырожденной симметризуемой матрице $K$ уравнения Тоды (1) допускают по крайней мере один интеграл

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\kappa_{ij}u^i_x u^j_x - \sum_{i=1}^{r}a_i\cdot u^i_{xx}; \tag{4}$$

хорошо известно (см., напр., [4]), что обе компоненты $T$ и $\bar{T}$ бесследового тензора энергии–импульса $\Theta = T\,\mathrm{d}x + \bar{T}\,\mathrm{d}y$ для лагранжевых уравнений (2) также имеют вид (4) с точностью до комплексного сопряжения. Введем обозначение $T_j \equiv \bar{D}_x^j(T)$; очевидно, что $T$ является дифференциальным генератором подпространства $\mathbf{T} \subset \ker\bar{D}_y$, поскольку любая функция $Q$ задает функционал $Q(x,T,T_1,\ldots,T_\mu) \in \ker\bar{D}_y$. Отметим, что в случае $r > 1$ специальным выбором матрицы $K$ можно добиться того, что функциональная оболочка $\mathbf{T}$ не будет исчерпывать все ядро $\ker \bar{D}_y$; в работе [6] сформулирован критерий равенства $\dim\ker \bar{D}_y = 2$ при $r=2$. Согласно [7], для существования $r$ нетривиальных независимых решений $\Omega^i$ уравнения $\bar{D}_y(\Omega)=0$ необходимо и достаточно, чтобы $K$ была матрицей Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Уравнения Тоды, ассоциированные с $\mathfrak{g}$, точно интегрируемы [1]. Подчеркнем, однако, что в случае матрицы $K$ общего положения интеграл (4) — единственный.

**2.** В дальнейшем будем отождествлять понятия производящих функций $\varphi = {}^t(\varphi^1,\ldots,\varphi^r)$ инфинитезимальных симметрий $\partial_\varphi = \sum_{i,\sigma} \bar{D}_\sigma(\varphi^i)\cdot\ \partial/\partial u^i_\sigma$ (здесь $u^i_\sigma \equiv D_\sigma(u^i)$) дифференциальных уравнений с самими этими симметриями; иначе говоря, производящие функции показывают скорость $\dot{u}^i = \varphi^i$ эволюции зависимых переменных $u^i$ вдоль «интегральных траекторий» полей $\partial_\varphi$. Напомним, что поиск производящих функций $\varphi$ инфинитезимальных симметрий произвольного уравнения $\mathcal{E}=\{F\equiv \mathbf{E}(\mathcal{L})=0\}$ состоит в решении уравнения $\partial_\varphi(F)=0$ на $\mathcal{E}$ или, что то же самое в силу определения оператора линеаризации $\ell$, уравнения $\ell_F(\varphi)=0$ на $\mathcal{E}$; наоборот, уравнение $\partial_\varphi(\mathcal{L})=0$, которому удовлетворяют нетеровы симметрии, следует решать без ограничения на соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}$.

Обозначим через $\Delta = |\Delta^i = \sum_{j=1}^r k^{ij}|$ вектор конформных весов полей Тоды $\exp(u) \equiv \equiv {}^t(\exp(u^1),\ldots,\exp(u^r))$.

Утверждение 1. Преобразование переменных

$$x\mapsto \mathcal{X}(x),\quad y\mapsto\mathcal{Y}(y),$$
$$u^i(x,y)\mapsto \tilde{u}^i = u^i(\mathcal{X},\mathcal{Y}) + \Delta^i \ln \mathcal{X}'(x)\mathcal{Y}'(y) \tag{5}$$

является конечной конформной симметрией уравнений Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$.

Инфинитезимальная форма преобразований (5), соответствующих замене $x\mapsto\mathcal{X}(x)$, такова: $\varphi = \square(f(x))$, где векторный дифференциальный оператор первого порядка $\square$ имеет вид

$$\square = u_x + \Delta\cdot \bar{D}_x, \tag{6}$$

а $f$ — произвольная гладкая функция.

Лемма 1. *Имеет место соотношение $\bar{\ell}_F\circ\square = \bar{D}_x\circ\square\circ\bar{D}_y$, и потому функции*

$$\varphi = \square(\Phi(x,\mathbf{\Omega})) \tag{7}$$

*являются симметриями уравнений Тоды: $\varphi\in \in \operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ при всякой $\Phi$, зависящей от произвольного набора $\mathbf{\Omega}$ интегралов $\Omega^i_j \equiv \bar{D}^j_x(\Omega^i) \in \in \ker\bar{D}_y$.*

Как было отмечено выше, $\mathbf{\Omega}\simeq\mathbf{T}$, если матрица $K$ — общего положения. Согласно [8], функции (7) исчерпывают множество решений уравнения $\bar{\ell}_F(\varphi)=0$ для системы (1): $\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}} \simeq \{\varphi=\square(\Phi(x,\mathbf{\Omega}))\bmod(x\leftrightarrow y)\}$. Отметим также, что любая конформная симметрия (5) уравнений Тоды нетерова, т. е. сохраняет $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$, однако почти все решения $\varphi$ вида (7) не являются нетеровыми симметриями уравнений (1).

**3.** Выясним, какие же из симметрий $\varphi = =\square(\Phi(x,\mathbf{T}))\in\operatorname{sym}\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ являются нетеровыми симметриями $\varphi_{\mathcal{L}}\in\operatorname{sym}\mathcal{L}_{\text{Toda}}$ уравнений Тоды. Итак, приступим к непосредственному решению уравнения $\partial_\varphi(\mathcal{L}_{\text{Toda}})=0$ относительно $\varphi$.

Детальное рассмотрение некоторых алгебраических аспектов, связанных с уравнением (1) (технически — вычисление члена $E_2^{0,2}(\mathcal{E}_{\text{Toda}})$ в $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова, см. [3]), показывает, что следующие два условия эквивалентны:

$$\partial_\varphi(\mathcal{L}_{\text{Toda}})=0 \Longleftrightarrow \mathbf{E}_u(\partial_\varphi(\mathcal{L}_{\text{Toda}}))=0,$$

т. е. плотность является полной дивергенцией, если и только если ее вариация равна нулю; этот вопрос не рассматривался в [2]. Далее, установим полезное свойство интеграла (4):

Лемма 2. *Соотношение $\mathbf{E}_u(\partial_\varphi(\mathcal{L}_{\text{Toda}}))=0$ эквивалентно условию*

$$-\mathbf{E}_u\left(D_y(T)\cdot\Phi(x,T,\ldots,T_m)\right)=0,$$

*где $\varphi=\square(\Phi)$, а полная производная $D_y$ не ограничена на уравнение $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$.*

Доказательство леммы 2 заключается в многочисленном применении тождества $\sum_{j=1}^r \kappa_{ij}\Delta^j = a_i$.

Лемма 3. *Старший порядок $m$ производной $T_m$ в наборе аргументов $\Phi$ четен: $m=2\mu$, т. е. $\Phi=\Phi(x,T,\ldots,T_{2\mu})$.*

Доказательство. Положим

$$G_i = \frac{\delta}{\delta u^i}(\partial_\varphi(\mathcal{L}_{\text{Toda}}))$$

и обозначим производную $D^k_x\circ D^l_y(u^j)$ через $u^j_{(k,l)}$; тогда получим

$$\frac{\partial G_i}{\partial u^j_{(m+4,1)}} = -\left[(-1)^3+(-1)^{m+2}\right]\cdot a_i\,a_j\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial T_m}=0,$$

откуда $(-1)^3+(-1)^{m+2}=0$ и потому $m$ четно. $\square$

Лемма 4. *Производные $\partial^2\Phi/\partial T_m\partial T_l$ равны нулю при всех $l$, лежащих в диапазоне $\mu<l\leqslant m$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что производные $\partial G_i/\partial u^j_{2m+4}$, $\partial G_i/\partial u^j_{2m+2}$, $\ldots$, $\partial G_i/\partial u^j_{m+6}$ равны нулю. $\square$

Рассмотрим теперь производную $\partial^2\Phi/\partial T_\mu\partial T_{2\mu}$. Она, вообще говоря, не равна нулю, что показывает

Лемма 5. *Тождество*

$$\mathbf{E}_u(-D_y(T)\cdot\mathbf{E}_T(P(x,T,\ldots,T_\mu)))\equiv 0$$

*верно при любой функции $P$.*

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned}D_y(T)\cdot\mathbf{E}_T(P)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &= \langle D_y(T),\ell_P^{(T)^*}(1)\rangle = \\ &= \langle \ell_P^{(T)}(D_y(T)),1\rangle + \mathrm{d}_h\gamma = \\ &= \langle \partial^{(T)}_{D_y(T)}P(x,T,\ldots,T_\mu),1\rangle + \mathrm{d}_h\gamma = \\ &= \langle D_y(P),1\rangle + \mathrm{d}_h\gamma \in \ker\mathbf{E}_u;\end{aligned}$$

в приведенной выше формуле произведение $\langle , \rangle$ принимает значения в горизонтальных 2-формах $\omega = f \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}_h = \sum_i \mathrm{d}x^i \otimes D_i$ — горизонтальный дифференциал, $\mathrm{d}_h\gamma \in \ker \mathbf{E}_u$ — некоторая точная форма, а все эволюционные дифференцирования, равно как и линеаризации, вычислены относительно переменной $T$. $\square$

Утверждение 2. Симметрия $\varphi = \square(\Phi(x,T,\ldots,T_m)) \in \ker \bar{\ell}_F$ является нетеровой симметрией уравнений Тоды (1) тогда и только тогда, когда, во-первых, $m = 2\mu$, $\mu \geqslant 0$, и, во-вторых, функция $\Phi = \mathbf{E}_T(Q(x,T,\ldots,T_\mu)) \in \operatorname{Im} \mathbf{E}_T$ принадлежит образу оператора Эйлера относительно $T$, где $Q$ — произвольная гладкая функция.

Доказательство. Покажем по индукции, что $\Phi \in \operatorname{Im} \mathbf{E}_T$. Рассмотрим такую функцию $P = P(m; x, T, \ldots, T_\mu)$, для которой выполнено условие

$$\partial^2 P(m)/\partial T_\mu^2 = (-1)^\mu \cdot \partial\Phi/\partial T_m, \qquad (8)$$

и положим $\tilde{\Phi} \overset{\text{def}}{=} \Phi - \mathbf{E}_T(P(m))$, откуда $\partial\tilde{\Phi}/\partial T_m \equiv 0$. Тогда, согласно лемме 3, будет верно соотношение

$$\mathbf{E}_u(D_y(T) \cdot \tilde{\Phi}(x,T,\ldots,T_{m-2})) = 0.$$

Далее, используя лемму 4, выбирая $P(m)$ в соответствии с условием (8) и воспользовавшись леммой 5, мы понижаем по индукции порядок $m = 2\mu$ до нуля с шагом 2, получая в итоге

$$\Phi = \mathbf{E}_T\left(\sum_{i=0}^{\mu} P(2i; x, T, \ldots, T_i)\right).$$

Утверждение доказано. $\square$

Итак, мы получили описание класса нетеровых симметрий уравнений Тоды, соответствующих матрице $K$ общего положения:

Теорема. *Нетеровы симметрии $\varphi_{\mathcal{L}}$ уравнений Тоды* (1), *построенных по симметризуемой матрице $K$ общего положения, имеют вид*

$$\varphi_{\mathcal{L}} = \square \circ \mathbf{E}_T(Q(x,\mathbf{T})) \bmod (x \leftrightarrow y),$$

*где оператор $\square$ определен в* (6), $\mathbf{E}_T = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i D_x^i \circ \partial/\partial T_i$ *есть оператор Эйлера относительно функционала $T$, заданного равенством* (4), *$Q$ — гладкая функция, а $\mathbf{T}$ — произвольный набор аргументов вида $T_i = \bar{D}_x^i(T)$, $i \geqslant 0$.*

Замечание. В случае если матрица $K$ удовлетворяет дополнительным ограничениям и потому существуют несколько независимых интегралов $\Omega^1 \equiv T, \Omega^2, \ldots, \Omega^q$, $1 < q \leqslant r$, соответствующие аналоги доказанной теоремы, содержащие более детальное описание структуры нетеровых симметрий уравнений Тоды, могут быть получены на основе аппарата производящих сечений законов сохранения [3]; мы предполагаем обсудить связанные с этим вопросы в отдельной работе.

Автор выражает благодарность А. М. Вербовецкому, И. С. Красильщику и А. М. Овчинникову за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке стипендией Правительства Российской Федерации и грантом INTAS YS 2001/2-33.

**Литература**

1. *Лезнов А.Н., Савельев М.В.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М., 1985.
2. *Sakovich S. Yu.* // J. Phys. A. Math. Gen. 1994. **27**. P. L125.
3. *Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М.* и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. М., 1997.
4. *Овчинников А.В.* Системы Тоды, ассоциированные с алгебрами Ли, и $W$-алгебры в некоторых задачах математической физики: Дисс. к.ф.-м.н. Физ. факультет МГУ. М., 1996.
5. *Киселев А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 6. С. 22.
6. *Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б.* // ТМФ. 1982. **51**, № 1. С. 10.
7. *Шабат А.Б., Ямилов Р.И.* // Препринт. Уфа, Башкир. филиал АН СССР. 1981.
8. *Мешков А.Г.* // ТМФ. 1985. **63**, № 3. С. 323.

Поступила в редакцию
12.09.2003