УДК 539.12.01

ГЕНЕРАЦИЯ ЛОРЕНЦ И CPT-НЕИНВАРИАНТНЫХ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК В РАМКАХ РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ КЭД

В. Ч. Жуковский, А. С. Разумовский

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Исследованы однопетлевые радиационные поправки к топологическому члену Черна–Саймонса в (3+1)-мерной расширенной модели КЭД при конечной температуре, а также при наличии слабого (по отношению к фермионной массе) постоянного однородного хромомагнитного поля.

1. В настоящее время большое число высокоточных экспериментов говорит в пользу того, что законы природы являются инвариантными относительно лоренцевых и CPT преобразований [1]. Тем не менее современная квантовая теория поля (КТП) допускает возможность нарушения лоренцевой инвариантности в результате спонтанного нарушения симметрии в расширенной (модифицированной) Стандартной Модели (SME) и, как возможное следствие, нарушение CPT инвариантности в локальной теории поля [2]. Технически это может быть осуществлено, в частности, путем введения CPT-нечетного члена взаимодействия с вектором b_μ в исходное действие теории для фермионов $\overline{\psi} b_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ [2], что может приводить к модификации дисперсионных соотношений для дираковских спиноров [2, 3].

Вопрос о динамическом происхождении постоянного вектора b_μ широко обсуждается в литературе [4–7]. При этом наличие вышеупомянутого слагаемого в фермионном секторе теории приводит к генерации за счет радиационных поправок нетривиального топологического члена Черна–Саймонса (ЧС) $\frac{1}{2}\Delta\eta_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta} A_\gamma$ с $\Delta\eta_\mu \sim b_\mu$ [8–12]. В настоящей работе исследовано влияние на этот процесс конечной температуры, а также цветовых вакуумных полей.

2. Рассмотрим фермионы, взаимодействующие с электромагнитным полем $A_\mu(x)$ и постоянным аксиально-векторным полем b_μ. Лагранжиан такой модели имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(\imath\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m - b_\mu \gamma^\mu \gamma_5)\psi.$$

Для получения индуцированного члена Черна–Саймонса в однопетлевом приближении вычислим антисимметричную часть оператора поляризации фотона

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\{\gamma^\mu S(p+k/2)\gamma^\nu S(p-k/2)\}. \tag{1}$$

Здесь фермионный пропагатор $S(p)$, модифицированный с учетом присутствия аксиально-векторного поля b_μ

$$S(p) = \frac{i}{\widehat{p} - m - \widehat{b}\gamma_5}, \tag{2}$$

при помощи несложных преобразований, ограничиваясь только линейными членами по b, может быть переписан в следующем виде

$$S(p) = i\left[\frac{\widehat{p} + m + \widehat{b}\gamma_5}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{2\gamma_5(\widehat{b}m - (bp))(\widehat{p} + m)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}\right] + O(b^2). \tag{3}$$

Тогда антисимметричная часть $\Pi_{\mu\nu}$ (линейная по b) будет

$$\Pi^A_{\mu\nu} = -4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \times \int d^4 p \left[(A_1 E_2^{\alpha\beta} - A_2 E_1^{\alpha\beta}) - (C_1^\alpha D_2^\beta - D_1^\beta C_2^\alpha)\right], \tag{4}$$

где

$$A = \frac{m}{p^2 - m^2}, \quad C^\mu = \frac{p^\mu}{p^2 - m^2}, \quad E^{\mu\nu} = -\frac{2mp^\mu b^\nu}{(p^2 - m^2)^2},$$

$$D^\mu = \frac{b^\mu}{p^2 - m^2} - \frac{2p^\mu (bp)}{(p^2 - m^2)^2} + \frac{2m^2 b^\mu}{(p^2 - m^2)^2},$$

а индексы 1 и 2 соответствуют тому, что в этих выражениях p заменяется на $p \pm k/2$.

3. Все дальнейшие вычисления конечнотемпературного вклада спиноров в $\Pi^A_{\mu\nu}$ будем проводить в рамках формализма мнимого времени. Для определения нетривиального топологического слагаемого будем работать в рамках статического предела $\mathbf{k} \to 0$, $k_0 = 0$, а также, учитывая, что вектор b должен быть времениподобным ($b^2 > 0$), без потери общности выберем $b = (b_0, 0, 0, 0)$. Тогда окончательно перепишем выражение для $\Pi^A_{\mu\nu}$ в сферических координатах

$$\Pi^{A,T}_{\mu\nu} = 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha 0} k^\alpha b^0 \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{\beta} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty dp\, p^2 \frac{3\omega_0^2 + 3m^2 - p^2}{(\omega_0^2 + p^2 + m^2)^3}. \tag{5}$$

Здесь $\omega_0 = \frac{\pi(2n+1)}{\beta}$, $n \in Z$, — мацубаровская частота для фермионов, а $\beta = \frac{1}{T}$. При интегрировании данного выражения по пространственным компонентам импульса следует ограничить его сверху значением Λ_c, представляющим собой пороговое значение импульса, при котором электроны становились бы нестабильными при взаимодействии с фотонами и распадались на электрон той же спиральности и электрон-позитронную пару [13]. Для времениподобного b это значение оказывается равным $\Lambda_c = 2m^2/b_0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Pi^{A,T}_{\mu\nu} &= 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha 0}k^\alpha b^0 \frac{e^2}{\pi^6}(\Lambda_c\beta)^3 \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2 + (\beta/\pi)^2(\Lambda_c^2 + m^2)]^2}.\end{aligned} \tag{6}$$

Вычислив ряд в последнем выражении (см. [14]), находим

$$\begin{aligned}\Pi^{A,T}_{\mu\nu} &= i\varepsilon_{\mu\nu\alpha 0}k^\alpha b^0 \frac{e^2}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \left[-\pi a + \pi a\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2 + 2\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{7}$$

где введено обозначение $a = \frac{\beta\Lambda_c}{\pi}\sqrt{1+(m/\Lambda_c)^2} \approx \approx \frac{\beta\Lambda_c}{\pi}$. Выражение (7) определяет температурную зависимость генерируемого радиационными поправками коэффициента члена Черна–Саймонса. Рассмотрим предельные значения (7) при $T = 0$ и $T \to \infty$. В первом случае $\Pi^{A,T=0}_{\mu\nu} = i\frac{e^2}{2\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha 0}k^\alpha b^0$, что полностью соответствует значению, полученному в [13] при нулевой темпеатуре. С другой стороны, $\Pi^A_{\mu\nu} \to 0$ в области достаточно высоких температур. Иными словами, при больших температурах генерация члена Черна–Саймонса подавляется и, как следствие этого, теория восстанавливает свою лоренцеву и CPT инвариантность.

4. Для изучения вклада хромомагнитного и аксиально-векторного полей в эффективный потенциал модели воспользуемся моделью кварков, описываемых спинорным полем $\psi(x)$, которые взаимодействуют помимо электромагнитного и аксиально-векторного поля с неабелевым калибровочным полем $A_\mu = A^a_\mu T_a$ в группе $SU(2)_c$. Это поле будем считать слабым по отношению к массе фермионов, но в то же время много большим по отношению к аксиально-векторному полю, т.е. $b_0^2 \ll gH \ll m^2$. Будем расматривать сферически-симметричные хромомагнитные поля, задавая их постоянными потенциалами

$$A^i_a = \delta^i_a\sqrt{\lambda},\quad A^0_a = 0,\quad G^a_{ik} = g\varepsilon_{ika}\lambda,\quad \lambda = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

В этом случае уравнение Дирака модифицируется

$$(\gamma^\mu\Pi_\mu - b_\mu\gamma^\mu\gamma_5 - m)\psi = 0, \tag{9}$$

где $\Pi_\mu = p_\mu - gA^a_\mu T_a$. Стационарным решениям этого уравнения соответствуют четыре ветви спектра

$$\begin{cases}\varepsilon^2_{1,2} = \left(\sqrt{\mathbf{p}^2} \pm \frac{1}{2}(g\sqrt{\lambda} - 2b_0)\right)^2 + m^2 > 0,\\ \varepsilon^2_{3,4} = \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + g^2\lambda} \pm \frac{1}{2}(g\sqrt{\lambda} + 2b_0)\right)^2 + m^2 > 0.\end{cases} \tag{10}$$

Из (10), следуя обычным кинематическим расчетам [13], нетрудно получить значение константы обрезания в этом случае $\Lambda_c = (4m^2)/(g\sqrt{\lambda} - 2b_0) \approx \approx (4m^2)/(g\sqrt{\lambda}) \gg m$. Однопетлевое эффективное действие определяется выражением

$$W^{(1)}_E = \tau \int \frac{dq_4}{2\pi} \sum_r \ln(q_4^2 + \varepsilon_r^2), \tag{11}$$

где τ — интервал времени в евклидовом пространстве, а суммирование по r подразумевает суммирование по всем ветвям спектра и квантовым числам, а также интегрирование по всем пространственным компонентам импульса. В результате для эффективного потенциала, связанного с действием соотношением $V_{\mathrm{eff}} = -(W_E)/(\tau L^3)$, получим

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{eff}} &= \frac{m^4}{4\pi^{5/2}} \int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^{3/2}} \int\limits_0^\infty dx\,x^2 \sum_{\nu=\pm 1} \mathrm{e}^{-z(1+x^2)} \times \\ &\times \Big[\mathrm{e}^{-z\left(1/4\phi^2 - \phi\psi + \psi^2 + \nu(\phi - 2\psi)x\right)} + \\ &+ \mathrm{e}^{-z\left(5/4\phi^2 + \phi\psi + \psi^2 + \nu(\phi + 2\psi)\sqrt{x^2+\phi^2}\right)} - 2\Big],\end{aligned} \tag{12}$$

где введены следующие обозначения: $\phi^2 = \dfrac{g^2\lambda}{m^2}$ и $\psi^2 = \dfrac{b_0^2}{m^2}$, а последнее слагаемое в квадратных скобках соответствует контрчлену так, чтобы $V_{\mathrm{eff}}(b_0 = g\sqrt{\lambda} = 0) = 0$.

Для вычисления интеграла (12) воспользуемся принятыми нами приближениями и будем раскладывать подынтегральное выражение в ряд по параметрам $\phi, \psi \ll 1$. Кроме того, воспользуемся регуляризацией обрезания по физическому импульсу, что в нашем случае соответствует ограничению интеграла по $x = p/m$ сверху значением $M = 4m/(g\sqrt{\lambda})$. Результат будет иметь вид

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{m^4}{4\pi^2}\left(I_\phi + I_\psi + I_{\phi\psi}\right), \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}I_\phi = &-\frac{M^3}{\sqrt{1+M^2}}\phi^2 + \frac{1}{48}\Bigg(24\ln\left(M + \sqrt{M^2+1}\right) - \\ &- \frac{24M + 35M^3 + 14M^5}{(1+M^2)^{5/2}}\Bigg)\phi^4 - \\ &- \frac{1}{384}M^3\left(\frac{183 + 408M^2 + 312M^4 + 80M^6}{(1+M^2)^{9/2}}\right)\phi^6 + O\left(\phi^8\right),\end{aligned}$$

$$I_\psi = 4\left(\frac{M}{\sqrt{1+M^2}} - \ln\left(M+\sqrt{M^2+1}\right)\right)\psi^2 + \\ + \frac{1}{3}M^3\frac{1-2M^2}{(1+M^2)^{5/2}}\psi^4 + O\left(\psi^6\right), \tag{14}$$

$$I_{\psi\phi} = \frac{M^3}{(1+M^2)^{3/2}}\psi\phi^3 - \frac{3}{2}\frac{M^3}{(1+M^2)^{5/2}}\psi^2\phi^2 + O\left(\phi^3\psi^3\right).$$

Заметим, что реальный вклад цветового поля в однопетлевой эффективный потенциал начинается с порядков $O(\phi^6)$, так как первое слагаемое $-M^2\phi^2$ в пределе $M \to \infty$ даст просто число, которое исчезнет при рассмотрении полного выражения (13), а слагаемое $O(\phi^4)$ в лидирующем порядке по M определяет перенормировку заряда и поля. Таким образом, приходим к первому конечному в этом выражении слагаемому $I_{\phi^6} = -\frac{5}{24}\left(\frac{gH}{m^2\sqrt{3}}\right)^3$, что в точности (так же, как и для $O(\phi^8)$) воспроизводит ранее полученный результат [16]. Тот факт, что разложение эффективного потенциала начинается с кубических порядков по полю H, а не с четвертой степени, как в абелевой электродинамике, связано с тем, что в неабелевой теории помимо обычных инвариантов можно составить и кубичный по полю инвариант, например $F^a_{\mu\nu}F^{\nu b}_{\lambda}F^{\lambda\mu}_c\varepsilon_{abc}$.

5. Продемонстрируем, как наличие слабого цветового магнитного поля корректирует значение индуцированного топологического вектора Черна–Саймонса, возникающего за счет взаимодействия вакуумной петли с аксиально-векторным полем [13]. Для этой цели в принятом нами ранее приближении вычислим антисимметричную часть поляризационного оператора, когда в теории присутствуют одновременно и хромомагнитное и псевдовекторное поля. Модифицированный фермионный пропагатор в этом случае будет иметь вид

$$S(p) = \frac{i}{\hat\Pi - m - \hat b\gamma_5}, \tag{15}$$

где, как и ранее, $\Pi_\mu = p_\mu - gA^a_\mu T_a$. Это выражение может быть также переписано в виде

$$S(p) = i\left(\hat\Pi + m + \hat b\gamma_5\right)\times \\ \times\left(\Pi^2 + 2(\Pi b)\gamma_5 - 2m\hat b\gamma_5 - m^2 + b^2 + \frac{1}{2}g(\sigma G)\right)^{-1}. \tag{16}$$

В силу того что в выбранной нами конфигурации (8) $[\gamma_5, \sigma_{ik}] = [\gamma_0\gamma_5, \sigma_{ik}] = 0$, можно корректно провести разложение пропагатора в ряд по полю b, оставляя только линейные члены

$$S(p) = i\left(\hat\Pi + m + \hat b\gamma_5\right)\times \\ \times\left[\frac{1}{\Pi^2 - m^2 + 1/2g(\sigma G)} - \frac{2(\Pi b)\gamma_5 - 2m\hat b\gamma_5}{\left(\Pi^2 - m^2 + 1/2g(\sigma G)\right)^2}\right]. \tag{17}$$

В результате для антисимметричной части поляризационного оператора, ограничивая, как и прежде, интегрирование по пространственным компонентам импульса константой Λ_c, получим

$$\Pi^A_{\rho\sigma} = -ie^2\frac{2}{\pi^2}\varepsilon_{\rho\sigma\mu 0}k_\mu b_0 \times \\ \times\left[-\frac{1}{2} + \frac{15}{32}\left(\frac{g\sqrt{\lambda}}{m}\right)^2 + O\left(\frac{g\sqrt{\lambda}}{m}\right)^4\right]. \tag{18}$$

Следует отметить, что первое слагаемое в квадратных скобках в выражении (18), отвечающее индуцированному члену Черна–Саймонса в присутствии только лишь аксиально-векторного поля, в точности совпадает с полученным ранее значением [13]. Что же касается следующего слагаемого в этом выражении, то оно является первой нетривиальной поправкой, обусловленной наличием хромомагнитного поля. Для сравнения приведем значение вклада в антисимметричную часть поляризационного оператора чисто хромомагнитного поля [15]

$$\Pi^A_{\rho\sigma}(\lambda, b_0 = 0) = ie^2\frac{5}{24\pi^2}\varepsilon_{\rho\sigma\mu}k^\mu\frac{g^3\lambda^{3/2}}{m^2}. \tag{19}$$

Как видно из приведенных результатов (18)–(19), свой вклад в индуцированную топологическую массу будут вносить оба поля. Что же касается значимости этих вкладов, то из приведенных соотношений следует, что

$$\frac{\Pi^A(b_0 \neq 0, \lambda = 0)}{\Pi^A(b_0 = 0, \lambda \neq 0)} \sim \frac{b_0}{g\sqrt{\lambda}}\left(\frac{m}{g\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Таким образом, относительная величина вкладов аксиально-векторного и калибровочного полей в значительной степени зависит от малости последнего по сравнению с фермионной массой. В то же время относительная величина самой поправки зависит только от отношения полей

$$\frac{\triangle\Pi^A(b_0 \neq 0, \lambda \neq 0)}{\Pi^A(b_0 = 0, \lambda \neq 0)} \sim \frac{b_0}{g\sqrt{\lambda}} \ll 1.$$

6. Как следует из результатов данной работы, можно предположить, что взаимодействие фотонов с аксиально-векторным полем, так же как и их взаимодействие с вакуумным конденсатом, посредством вакуумной кварковой петли может служить одним из возможных механизмов для объяснения эффекта поворота плоскости поляризации электромагнитного излучения при распространении на космологические расстояния (см. указания на его недавние астрофизические наблюдения [2]). Следует, однако, заметить, что, несмотря на все предпринятые попытки объяснения динамического происхождения такого псевдовекторного поля [4–6], этот вопрос по-прежнему остается открытым.

Авторы благодарят Д. Эберта за полезные советы и обсуждение результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского общества (грант DFG 436 RUS 113/477).

Литература

1. Particle Data Group (*Hagiwara K., Khikasa, Knakamura* et al.) // Phys. Rev. 2002. **D66**. P. 010001.
2. *Colladay D., Kostelecky V.A.* // Phys. Rev. 1998. **D58**. P. 116002.
3. *Kostelecky V.A., Lehnert R.* // Phys. Rev. 2001. **D63**. P. 065008.
4. *Andrianov A.A., Soldati R., Sorbo L.* // Phys. Rev. 1999. **D59**. P. 025002.
5. *Shapiro I.L.* // Phys. Rept. 2001. **357**. P. 113.
6. *Volovik G.E., Vilenkin A.* // Phys. Rev. 2000. **D62**. P. 025014.
7. *Goldhaber M., Trimble V.* // J. Astrophys. Astr. 1996. **17**. P. 17.
8. *Jackiw R., Kostelecky V.A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 3572.
9. *Perez-Viktoria M.* // J. High Energy Phys. 2001. **04**. P. 032.
10. *Chaichian M., Chen W.F., Gonzalez Felipe R.* // Phys. Lett. 2001. **B503**. P. 215.
11. *Chung J.M., Oh P.* // Phys. Rev. 1999. **D60**. P. 067702.
12. *Chen W.F.* // Phys. Rev. 1999. **D60**. P. 085007.
13. *Andrianov A.A., Giacconi P., Soldati R.* http://jhep022002030
14. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.
15. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch.* hep-th/9712016.
16. *Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М., 1989.

Поступила в редакцию
23.12.03