УДК 517.958:621.372.8

МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВОЛНОВОДА С КИРАЛЬНОЙ СРЕДОЙ

В. П. Моденов, И. В. Цветков

(*кафедра математики*)

Дается математическое обоснование вычислительного алгоритма решения задачи о распространении электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе с локальным киральным заполнением.

Введение

В 1980-е гг. начали активно изучаться электродинамические свойства искусственных композиционных материалов. К таким материалам относятся и киральные среды, содержащие зеркально-асимметричные элементы [1].

В настоящее время большой интерес представляет изучение процессов распространения и рассеяния электромагнитного поля на киральных структурах. Это связано прежде всего со специфическими свойствами рассеяния электромагнитных волн на объектах с киральными включениями.

Главным отличием, с математической точки зрения, киральной среды от обычной изотропной является форма материальных уравнений: векторы электрической и магнитной индукций связаны как с напряженностью электрического, так и магнитного полей.

В связи с постоянно увеличивающимся интересом к применению киральных сред в физике и технике СВЧ чрезвычайно важным представляется развитие соответствующего математического аппарата, позволяющего эффективно численно решать краевые задачи для системы уравнений Максвелла с материальными уравнениями киральной среды [2].

Постановка задачи

Введем цилиндрическую систему координат; будем рассматривать поле внутри области $\Omega = \{r \leqslant R_0;\ z \in (-\infty, +\infty)\}$.

Поместим внутрь этой области цилиндрическое киральное тело, ограниченное гладкой боковой поверхностью Σ_S и торцевыми стенками $z = 0$ и $z = d$.

Задача об определении постоянной распространения сводится к краевой задаче для уравнений Максвелла для киральной среды [2] с однородным граничным условием на стенке волновода:

$$\begin{cases} [\nabla \times \mathbf{H}] - ik\left(\dfrac{\beta(\xi)}{\rho_0}\mathbf{E} - i\mu\xi\mathbf{H}\right) = 0, \\ [\nabla \times \mathbf{E}] + ik\left(\mu\rho_0\mathbf{H} + i\mu\xi\mathbf{E}\right) = 0, \\ [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}]\,|_{C_s} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

и условиями сопряжения на границе C_s киральной вставки, заключающимися в требовании непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей, условиями на бесконечности:

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{matrix}\right\}_{z\to-\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{-ih_m z}\begin{cases}\mathbf{E}_{-m}(M)\\ \mathbf{H}_{-m}(M)\end{cases} + A e^{ih_{m_0} z}\begin{cases}\mathbf{E}_{m_0}(M)\\ \mathbf{H}_{m_0}(M)\end{cases}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{matrix}\right\}_{z\to+\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{ih_m z}\begin{cases}\mathbf{E}_{m}(M)\\ \mathbf{H}_{m}(M)\end{cases},$$

где $\{\mathbf{E}_m(M), \mathbf{H}_m(M)\}\, e^{ih_m}$ — нормальные волны пустого волновода [3], соответствующие бесконечно удаленным участкам волновода. Эту задачу будем называть задачей (А). Разлагая векторы напряженности электрического и магнитного полей на поперечные и продольные компоненты, выражая продольные компоненты через поперечные [3], приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} [\nabla \times \mathbf{H}]_t - ik\left(\dfrac{\beta(\xi)}{\rho_0}\mathbf{E}_t - i\mu\xi\mathbf{H}_t\right) = 0, \\ [\nabla \times \mathbf{E}]_t + ik\left(\mu\rho_0\mathbf{H}_t + i\mu\xi\mathbf{E}_t\right) = 0, \\ E_z = -\dfrac{\xi}{k\varepsilon}\left(\nabla, \tilde{\mathbf{E}}_t\right) - \dfrac{i\rho_0}{k\varepsilon}\left(\nabla, \tilde{\mathbf{H}}_t\right), \\ H_z = i\dfrac{\beta(\xi)}{k\mu\varepsilon}\dfrac{1}{\rho_0}\left(\nabla, \tilde{\mathbf{E}}_t\right) - \dfrac{\xi}{k\varepsilon}\left(\nabla, \tilde{\mathbf{H}}_t\right), \end{cases} \tag{3}$$

где введено обозначение: $\tilde{\mathbf{A}}_t = \{A_\varphi, -A_r, 0\}$ при $\mathbf{A}_t = \{A_r, A_\varphi, 0\}$.

Решение должно удовлетворять:

1. Однородному граничному условию

$$[\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}]|_{C_s} = 0, \quad \mathbf{E}_z = 0.$$

2. Условиям непрерывности на границе C_s киральной вставки

$$\mathbf{E}_\tau^{(1)} = \mathbf{E}_\tau^{(2)}, \quad \mathbf{H}_\tau^{(1)} = \mathbf{H}_\tau^{(2)},$$

где τ означает направление, касательное к границе раздела сред, индексы $(1), (2)$ — номера сред.

3. Условиям излучения и возбуждения, которые можно записать в виде:

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{E}_t\\ \mathbf{H}_t\end{matrix}\right\}_{z\to-\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{-ih_m z}\begin{cases}\mathbf{E}_{-mt}(M)\\ \mathbf{H}_{-mt}(M)\end{cases} + \\ + Ae^{ih_{m_0}z}\begin{cases}\mathbf{E}_{m_0t}(M)\\ \mathbf{H}_{m_0t}(M)\end{cases}, \quad (4)$$

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{E}_t\\ \mathbf{H}_t\end{matrix}\right\}_{z\to+\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{ih_m z}\begin{cases}\mathbf{E}_{mt}(M)\\ \mathbf{H}_{mt}(M)\end{cases}.$$

Эту задачу будем решать методом, аналогичным методу Галеркина, сводя краевую задачу для уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве базисных функций выберем вектор-функции $\mathbf{E}_{mt}(M)$ и $\mathbf{H}_{mt}(M)$, соответствующие поперечным компонентам нормальных волн незаполненного регулярного волновода данного поперечного сечения.

В силу полноты системы вектор-функций $\mathbf{E}_{mt}(M)$ и $\mathbf{H}_{mt}(M)$ в любом сечении $z = \mathrm{const}$ имеют место разложения:

$$\begin{cases}\mathbf{E}_t(M,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(z)\mathbf{E}_{nt}(M),\\ \mathbf{H}_t(M,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(z)\mathbf{H}_{nt}(M).\end{cases} \quad (5)$$

Из уравнений (3) следует, что решение задачи (1) при любом $z = \mathrm{const}$ удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{cases}\iint\limits_S \left\{[\nabla\times\mathbf{H}] - ik\left(\dfrac{\beta(\xi)}{\rho_0}\mathbf{E} - i\mu\xi\mathbf{H}\right)\right\}_t \mathbf{E}^*_{mt} = \\ \qquad = -\int\limits_{C_S} [H_z]\left\{\mathbf{E}^*_{mt}[\mathbf{i}_z\times\boldsymbol{\nu}]\right\}\dfrac{dl}{\sin\gamma},\\ \iint\limits_S \left\{[\nabla\times\mathbf{E}] + ik\left(\mu\rho_0\mathbf{H} + i\mu\xi\mathbf{E}\right)\right\}_t \mathbf{H}^*_{mt} = \\ \qquad = -\int\limits_{C_S} [E_z]\left\{\mathbf{H}^*_{mt}[\mathbf{i}_z\times\boldsymbol{\nu}]\right\}\dfrac{dl}{\sin\gamma},\end{cases} \quad (6)$$

где C_S — контур поперечного сечения S кирального тела; $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности Σ_S кирального тела; $\gamma = \widehat{(\boldsymbol{\nu},\mathbf{i}_z)}$. Контурные интегралы от скачков $[H_z] = H_z^e - H_z^i$, $[E_z] = E_z^e - E_z^i$ служат для удовлетворения условий сопряжения задачи (А) в интегральном смысле.

Приближенное решение системы (3) ищем в виде конечных разложений:

$$\begin{cases}\mathbf{E}^N_t(M,t) = \sum\limits_{n=1}^{N} A^N_n(z)\mathbf{E}_{nt}(M),\\ \mathbf{H}^N_t(M,t) = \sum\limits_{n=1}^{N} B^N_n(z)\mathbf{H}_{nt}(M),\end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases}E^N_z = -\dfrac{\xi}{k\varepsilon}\left(\nabla,\tilde{\mathbf{E}}^N_t\right) - \dfrac{i\rho_0}{k\varepsilon}\left(\nabla,\tilde{\mathbf{H}}^N_t\right),\\ H^N_z = i\dfrac{\beta(\xi)}{k\mu\varepsilon}\dfrac{1}{\rho_0}\left(\nabla,\tilde{\mathbf{E}}^N_t\right) - \dfrac{\xi}{k\varepsilon}\left(\nabla,\tilde{\mathbf{H}}^N_t\right).\end{cases} \quad (8)$$

Получим систему для определения коэффициентов разложений $A^N_n(z)$ и $B^N_n(z)$, в дальнейшем называемую системой волноводных уравнений. Потребуем, чтобы удовлетворялись следующие интегральные соотношения, аналогичные (6):

$$\begin{cases}\iint\limits_S \left\{[\nabla\times\mathbf{H}^N] - ik\left(\dfrac{\beta(\xi)}{\rho_0}\mathbf{E}^N - i\mu\xi\mathbf{H}^N\right)\right\}_t \mathbf{E}^*_{mt} = \\ \qquad = -\int\limits_{C_S} [H^N_z]\left\{\mathbf{E}^*_{mt}[\mathbf{i}_z\times\boldsymbol{\nu}]\right\}\dfrac{dl}{\sin\gamma},\\ \iint\limits_S \left\{[\nabla\times\mathbf{E}^N] + ik\left(\mu\rho_0\mathbf{H}^N + i\mu\xi\mathbf{E}^N\right)\right\}_t \mathbf{H}^*_{mt} = \\ \qquad = -\int\limits_{C_S} [E^N_z]\left\{\mathbf{H}^*_{mt}[\mathbf{i}_z\times\boldsymbol{\nu}]\right\}\dfrac{dl}{\sin\gamma}.\end{cases} \quad (9)$$

Используем тождества

$$\begin{cases}[\nabla\times\mathbf{H}]_t = [\nabla\times H_z\mathbf{i}_z] + \left[\mathbf{i}_z\times\dfrac{\partial\mathbf{H}_t}{\partial z}\right],\\ [\nabla\times\mathbf{E}]_t = [\nabla\times E_z\mathbf{i}_z] + \left[\mathbf{i}_z\times\dfrac{\partial\mathbf{E}_t}{\partial z}\right],\end{cases} \quad (10)$$

которые после подстановки выражений продольных компонент через поперечные (8) дают:

$$\begin{cases}\iint\limits_S \left\{i\dfrac{\beta(\xi)}{k\mu\varepsilon}\dfrac{1}{\rho_0}\left[\nabla\times\left(\nabla,\tilde{\mathbf{E}}^N_t\right)\mathbf{i}_z\right] - \right.\\ \quad - \dfrac{\xi}{k\varepsilon}\left[\nabla\times\left(\nabla,\tilde{\mathbf{H}}^N_t\right)\mathbf{i}_z\right] + \\ \quad \left. + \left[\mathbf{i}_z\times\dfrac{\partial\mathbf{H}^N_t}{\partial z}\right] - ik\left(\dfrac{\beta(\xi)}{\rho_0}\mathbf{E}^N_t - i\mu\xi\mathbf{H}^N_t\right)\right\}\mathbf{E}^*_{mt}ds = \\ \qquad = -\int\limits_{C_S} [H^N_z]\left\{\mathbf{E}^*_{mt}[\mathbf{i}_z\times\boldsymbol{\nu}]\right\}\dfrac{dl}{\sin\gamma}, \quad m = 1,\ldots,N,\\ \iint\limits_S \left\{-\dfrac{\xi}{k\varepsilon}\left[\nabla\times\left(\nabla,\tilde{\mathbf{E}}^N_t\right)\mathbf{i}_z\right] - \right.\\ \quad - \dfrac{i\rho_0}{k\varepsilon}\left[\nabla\times\left(\nabla,\tilde{\mathbf{H}}^N_t\right)\mathbf{i}_z\right] + \\ \quad \left. + \left[\mathbf{i}_z\times\dfrac{\partial\mathbf{E}^N_t}{\partial z}\right] + ik\left(\mu\rho_0\mathbf{H}^N_t + i\mu\xi\mathbf{E}^N_t\right)\right\}\mathbf{H}^*_{mt}ds = \\ \qquad = -\int\limits_{C_S} [E^N_z]\left\{\mathbf{H}^*_{mt}[\mathbf{i}_z\times\boldsymbol{\nu}]\right\}\dfrac{dl}{\sin\gamma}, \quad m = 1,\ldots,N.\end{cases} \quad (11)$$

Подставляя конечные суммы (7) в (11), выполняя почленное интегрирование и воспользовавшись условиями ортогональности вектор-функций $\{\mathbf{E}_{nt}, \mathbf{H}_{nt}\}$, получим систему волноводных уравнений.

Задачу определения поля $\{\mathbf{H}^N, \mathbf{E}^N\}$ из решения краевой задачи, образованной этой системой волноводных уравнений, совместно с представлениями поля (7), (8), а также условия для амплитудных коэффициентов

$$\begin{cases} A_m^N(0) + B_m^N(0) = 2A\delta_{mm_0}, \\ A_m^N(d) - B_m^N(d) = 0, \quad m = \in [1, N] \end{cases} \tag{12}$$

будем называть задачей (B). Это краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, имеющими достаточно удобный вид для программирования при численном решении.

Теорема. *Пусть задача* (A) *разрешима и компоненты ее решения* $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ *вместе с первыми производными принадлежат пространству* $L_2(\Omega)$. *Тогда, решение задачи* (B) *сходится в среднем к решению задачи* (A).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично работе [4]. Основным для определения свойств решения задачи (B) является следующее соотношение:

$$\sum_{m=1}^{N} \left\{ \operatorname{Re}\beta_m \left|P_m^N\right|^2 + \operatorname{Re}\beta_m \left|T_m^N\right|^2 \right\} + \\ + k \operatorname{Im} \int\limits_V \left(\mu\rho_0 \left|H^N\right|^2 + \frac{\beta(\xi)}{\rho_0} \left|E^N\right|^2 \right) dv + \\ + \operatorname{Re}\beta_{m_0} \left| P_{m_0}^N - \frac{\beta_{m_0}}{\operatorname{Re}\beta_{m_0}} A \right|^2 = \frac{|\beta_{m_0}|^2}{\operatorname{Re}\beta_{m_0}} |A|^2 . \tag{13}$$

Из этого соотношения следует:

1. Однородная задача (B) имеет только тривиальное решение. Отсюда в силу общих свойств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что неоднородная система разрешима и ее решение единственно.

2. Решение задачи (B) — поле $\{\mathbf{E}^N, \mathbf{H}^N\}$, удовлетворяющее условиям ограниченности, равномерным по N:

$$\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \left|P_m^N\right|^2 < C, \quad \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \left|T_m^N\right|^2 < C, \tag{14}$$

$$\int\limits_V \left|\mathbf{E}^N\right|^2 dv < C, \quad \int\limits_V \left|\mathbf{H}^N\right|^2 dv < C, \tag{15}$$

причем константа C не зависит от номера N, а определяется лишь способом возбуждения среды.

Полученные равномерные оценки по N дают возможность доказать сходимость приближенного решения к точному.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложен и математически обоснован численный алгоритм решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла с материальными уравнениями киральной среды в цилиндрической области с граничными условиями первого рода, основанный на модифицированной схеме неполного меода Галеркина. Сформулирована теорема о сходимости в среднем приближенного численного решения к точному решению рассматриваемой краевой задачи.

Литература

1. *Lindell I.V., Sihvola A.H., Tretyakov S.A., Viiatanen A.J.* Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media. Boston, 1994.
2. *Моденов В.П., Цветков И.В.* // Тр. VII Всерос. школы-семинара. Волновые явления в неоднородных средах. М., 2000. **2**. С. 4.
3. *Свешников А.Г., Моденов В.П.* // Сб. Вычисл. методы и программирование. М., 1965. № 3. С. 364.
4. *Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1963. **3**, № 5. С. 953.

Поступила в редакцию
15.09.03