

УДК 519.21

О РЕДУКЦИИ К ИДЕАЛЬНОМУ ПРИБОРУ ПО ДАННЫМ ТЕСТИРУЮЩИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Е. А. Черемухин, А. И. Чуличков

(кафедра компьютерных методов физики)

E-mail: cherem@newmail.ru; ach@cmp.phys.msu.su

На основе теории измерительно-вычислительных систем (ИВС) предложен новый подход к решению задачи интерпретации экспериментальных данных в случае, когда модель измерений априори неизвестна, но имеется набор тестирующих измерений. Результат интерпретации измерения рассматривается как выходной сигнал прибора, ближайшего к идеальному при заданном уровне случайной погрешности.

Введение

Рассматривается схема измерений, характерная для большинства экспериментов:

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где ξ — искаженный шумом ν результат измерения выходного сигнала Af прибора A , на вход которого подан сигнал f от некоторого объекта. Требуется определить, как выглядел бы результат измерения Uf того же сигнала с помощью идеального прибора U (в частности, можно считать $U = I$, где I — тождественное преобразование). Один из подходов к интерпретации измерения ξ состоит в его линейном преобразовании R , результат которого $R\xi = RAf + R\nu$ можно рассматривать как выходной сигнал прибора RA , ближайшего к U . Поиск такого преобразования составляет задачу редукции к идеальному прибору [1, 2]. Если известна математическая модель эксперимента, связывающая измерения с параметрами объекта, то решается стандартная задача редукции. Иногда данные о математической модели можно получать из тестирующего эксперимента, в котором измеряется отклик измерительной системы на ряд известных (тестовых) сигналов, поданных на ее вход. Особенностью этой работы является то, что данные тестирующего эксперимента используются для редукции напрямую, т. е. без промежуточного восстановления модели прибора A . В работе [3] подобный подход использовался для наиболее точного синтеза сигнала Uf ; в настоящей работе минимизируется погрешность синтеза прибора U .

Постановка задачи

В теории измерительно-вычислительных систем [1, 2] рассматривается модель схемы (1), в которой сигналы Af , ξ и ν являются элементами евклидова пространства R_n размерности $n \leq \infty$, сигнал f — элемент евклидова пространства R_N размерности $N \leq \infty$, известен линейный оператор $A \in (R_N \rightarrow R_n)$, действующий из пространства R_N в R_n , а шум ν считается случайным векто-

ром пространства R_n с нулевым математическим ожиданием $E\nu = 0$ и корреляционным оператором $\Sigma \in (R_n \rightarrow R_n)$. О сигнале f априори ничего не известно. Эта модель носит обозначение $[A, \Sigma]$.

Рассмотрим случай, когда линейный оператор $A \in (R_N \rightarrow R_n)$ заранее неизвестен, но есть возможность его тестирования. Для этого на вход прибора A подается серия известных тестовых сигналов $f_1, \dots, f_K \subset R_N$ и измеряются соответствующие выходные сигналы $\xi_1, \dots, \xi_K \subset R_n$ согласно схеме

$$\xi_j = Af_j + \nu_j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (2)$$

где погрешности измерения ν_j имеют нулевые математические ожидания и заданные ковариационные операторы Σ_j , $j = 1, \dots, K$. Задача состоит в том, чтобы по набору тестовых сигналов $f_1, \dots, f_K \subset R_N$, результатам их измерений $\xi_1, \dots, \xi_K \subset R_n$ и известной модели погрешностей ν_j , $j = 1, \dots, K$, оценить сигнал Uf на основании измерения, проведенного по схеме (1) с заданной моделью погрешности ν .

Пусть тестовые сигналы в выражении (2) представляют собой конечный набор произвольных векторов $f_1, \dots, f_K \subset R_N$, $K \leq N$, $K < \infty$. Построим матрицы $\Xi \in (R_K \rightarrow R_n)$ и $F \in (R_K \rightarrow R_N)$, определяемые для любого вектора $g = (g_1, \dots, g_K) \in R_K$ координатного векторного пространства R_K соотношениями

$$\Xi g = \sum_{j=1}^K g_j \xi_j, \quad Ng = - \sum_{j=1}^K g_j \nu_j, \quad Fg = \sum_{j=1}^K g_j f_j;$$

иными словами, если векторы $\xi_1, \dots, \xi_K \subset R_n$, $\nu_1, \dots, \nu_K \subset R_n$ и $f_1, \dots, f_K \subset R_N$ заданы своими координатами в некоторых ортонормированных базисах, то столбцы матриц операторов $\Xi \in (R_K \rightarrow R_n)$, $N \in (R_K \rightarrow R_n)$ и $F \in (R_K \rightarrow R_N)$ в этих же базисах равны векторам $\xi_1, \dots, \xi_K \subset R_n$, $\nu_1, \dots, \nu_K \subset R_n$ и $f_1, \dots, f_K \subset R_N$ соответственно. Тогда схему тестовых измерений (2) можно записать в виде

$$\Xi = AF - N. \quad (3)$$

Запишем вектор $f \in R_N$ в виде

$$f = FF^{-1}f + (I - FF^{-1})f, \quad (4)$$

где $F^- \in (R_N \rightarrow R_K)$ — оператор, псевдообратный к F [4]; здесь первое слагаемое справа представляет собой проекцию сигнала f на линейную оболочку тестовых сигналов, а второе — проекцию f на ее ортогональное дополнение в R_N . Подставляя (4) в (1), с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \xi &= AFF^-f + A(I - FF^-)f + \nu = \\ &= (\Xi + N)F^-f + A(I - FF^-)f + \nu. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, измерение вектора f с помощью прибора A , заданного тестовыми измерениями (3), можно рассматривать как измерение вектора f с помощью измерительного прибора $\Xi F^- \in (R_N \rightarrow R_n)$, заданного с погрешностью. Задачи, в которых модель измерительного прибора задается случайным оператором, исследовались в работе [1] для задач прогноза и редукции измерений. Заметим, что в правой части равенства (5) известен лишь оператор $\Xi F^- \in (R_N \rightarrow R_n)$, остальные слагаемые можно рассматривать как мешающие оценке сигнала Uf .

Будем искать оценку сигнала Uf на основании измерения (5), считая, что в схеме (5) оператор $\Xi \in (R_K \rightarrow R_n)$ известен с погрешностью $N \in (R_K \rightarrow R_n)$, обладающей нулевым математическим ожиданием и известным вторым моментом*), погрешность измерения $\nu \in R_n$ имеет нулевое математическое ожидание и заданный ковариационный оператор $\Sigma \in (R_n \rightarrow R_n)$. Линейный оператор $A \in (R_N \rightarrow R_n)$ неизвестен.

Запишем линейное преобразование $R \in (R_n \rightarrow R_m)$ сигнала ξ из (5) с учетом (4):

$$\begin{aligned} R\xi &= R(\Xi + N)F^-f + RA(I - FF^-)f + R\nu = \\ &= Uf + (R\Xi F^- - UFF^-)f + RNF^-f + \\ &\quad + (RA - U)(I - FF^-)f + R\nu. \end{aligned} \quad (6)$$

Результат этого преобразования можно рассматривать как сигнал на выходе прибора $R\Xi F^-$, отличающегося от U на линейный оператор

$$(R\Xi F^- - UFF^-) + RNF^- + (RA - U)(I - FF^-), \quad (7)$$

кроме того, его выходной сигнал искажается еще и шумом $R\nu$. Выберем преобразование $R \in (R_n \rightarrow R_m)$ так, чтобы отличие оператора $R\Xi F^-$ от U было как можно меньше, при этом величина шумовой погрешности $R\nu$ была ограничена.

Рассмотрим каждое слагаемое в (7) отдельно. Для конечного числа тестовых измерений первые два слагаемых в (7) являются конечномерными операторами, а значит, операторами Гильберта–Шмидта. Первое из этих слагаемых при фиксированном операторе R зависит от известного результата тестовых измерений и заданного оператора U . Оценить его можно в метрике Гильберта–Шмидта:

) В данном случае достаточно знать линейный оператор $\mathbf{E}N(F^-F^{-})N^* \in (R_K \rightarrow R_K)$.

$\|R\Xi F^- - UFF^-\|_2^2 < \infty$, здесь $\|C\|_2^2 = \text{tr} CC^*$ — квадрат нормы Гильберта–Шмидта оператора C (для заданных базисов пространств R_K и R_m квадрат этой нормы равен сумме квадратов всех матричных элементов матрицы C).

Второе слагаемое — случайный оператор, однако при заданном операторе R можно оценить средний квадрат его нормы Гильберта–Шмидта: $\mathbf{E}\|RNF^-\|_2^2 = \mathbf{E} \text{tr} RNF^-(F^-)^*N^*R^* = \text{tr} R(\mathbf{E}NF^-(F^-)^*N^*)R^*$. Введя обозначение $J = \mathbf{E}NF^-(F^-)^*N^*$, получим оценку для этого слагаемого: $\mathbf{E}\|RNF^-\|_2^2 = \text{tr} RJR^*$.

Рассмотрим третье слагаемое. Поскольку оператор A произволен, то при условии $(I - FF^-) \neq 0$ оценить величину этого слагаемого не удастся, так как не контролируется составляющая $(I - FF^-)f$ вектора f , ортогональная линейной оболочке $L(f_1, \dots, f_K) \subset R_N$ тестовых сигналов. Следовательно, отличие оператора (7) от заданного U можно контролировать тогда и только тогда, когда $(I - FF^-)f = 0$. Однако равенство выполняется либо при условии $(I - FF^-) = 0$, т.е. когда тестовые сигналы f_1, \dots, f_K образуют полную систему векторов в пространстве R_N , $L(f_1, \dots, f_K) = R_N$, либо если $L(f_1, \dots, f_K) \neq R_N$, но априори известно, что $f \in L(f_1, \dots, f_K)$.

Наконец, на величину шумовой погрешности $R\nu$ в (6) наложим ограничение $\mathbf{E}\|R\nu\|^2 \leq \varepsilon$.

Итак, при выполнении условия $(I - FF^-)f = 0$ оператор R , осуществляющий редукцию измерения (1) к виду (6), свойственную измерению сигнала f прибором, ближайшим к U с контролируемой погрешностью $\mathbf{E}\|R\nu\|^2 \leq \varepsilon$, является решением задачи на минимум

$$\begin{aligned} R &= \arg \inf \left\{ \mathbf{E} \|(R\Xi F^- - UFF^-) + RNF^-\|_2^2 \mid \right. \\ &\quad \left. \mathbf{E} \|R\nu\|^2 \leq \varepsilon \right\} = \\ &= \arg \inf \left\{ \text{tr}(R\Xi F^- - UFF^-)(R\Xi F^- - UFF^-)^* + \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} RJR^* \mid \text{tr} R\Sigma R^* \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $(I - FF^-)f \neq 0$, то в (6) прибор $(R\Xi F^- - UFF^-) + RNF^- + (RA - U)(I - FF^-)$ отличается от U на неконтролируемую величину.

Решение задачи (8) дается следующей теоремой.

Теорема. Если ковариационные операторы Σ и N невырождены, то для любого прибора, заданного линейным оператором U , задача (8) разрешима при $0 \leq \varepsilon \leq \infty$ и ее решение имеет вид:

$$R_\varepsilon = \begin{cases} R(\omega) = V\Xi^*S_\omega^{-1}, & \omega = \omega_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ R(0) = V\Xi^*S_0^{-1}, & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \\ 0, & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $V = U(F^-)^*$, $S_\omega = \Xi F^- (\Xi F^-)^* + J + \omega \Sigma$, $\omega \geq 0$, $\varepsilon_0 = \text{tr } V \Xi^* S_0^{-1} \Sigma S_0^{-1} \Xi V^*$, и ω_ε — корень уравнения $\varepsilon = \text{tr } V \Xi^* S_\omega^{-1} \Sigma S_\omega^{-1} \Xi V^*$. При этом уровень шума $h(U, \varepsilon) = \mathbf{E} \|R_\varepsilon \nu\|^2$ и отличие $g(U, \varepsilon)$ прибора $R \Xi F^-$ от U дается равенствами:

$$h(U, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ \varepsilon_0, & \varepsilon > \varepsilon_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$g(U, \varepsilon) = \begin{cases} \left\| V \Xi^* S_\omega^{-1} \Xi F^- - U F F^- \right\|_2^2 + \left\| V \Xi^* S_\omega^{-1} J^{1/2} \right\|_2^2, & \omega = \omega_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \left\| V \Xi^* S_0^{-1} \Xi F^- - U F F^- \right\|_2^2 + \left\| V \Xi^* S_0^{-1} J^{1/2} \right\|_2^2, & \varepsilon \geq 0, \\ \text{tr } U U^*, & \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (11)$$

На практике используется подход, связанный с оперативной характеристикой задачи (8). Качество синтеза прибора U , основанного на решении вариационной задачи (8), задается соотношениями (10), (11), которые в параметрическом виде определяют зависимость величины «приборной невязки» $g(U, \varepsilon)$ от уровня шума $h(U, \varepsilon)$ на выходе прибора $R \Xi F^-$ для $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Эта зависимость носит название оперативной характеристики задачи (8). График оперативной характеристики обычно изображается на плоскости (h, g) , с каждой точкой графика оперативной характеристики однозначно связаны три значения: параметра ω , используемого для вычисления оператора $R(\omega)$ по формуле (9), уровня шумов $h(U, \varepsilon)$ на выходе прибора $R \Xi F^-$ и значения «приборной невязки» $g(U, \varepsilon)$. Выбор компромиссных значений $h(U, \varepsilon)$ и $g(U, \varepsilon)$ задает параметр ω указанием точки на графике $g = g(h)$.

Схема измерений в случае ортонормированных тестовых сигналов

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда тестовые сигналы представляют собой конечный набор ортонормированных векторов $e_1, \dots, e_K \subset \subset R_N$, $K \leq N$:

$$\xi_j = A e_j + \nu_j, \quad j = 1, \dots, K. \quad (12)$$

Обозначим E_K матрицу, столбцами которой являются тестовые сигналы e_1, \dots, e_K ; в прежних обозначениях $E_K = F$. Так как ее столбцы — ортонормированные векторы, $E_K^- = E_K^*$. Выражение (4) примет вид:

$$f = \sum_{j=1}^K g_j e_j + f^-, \quad (13)$$

где $f^- = (I - E_K E_K^*) f \in L^-(e_1, \dots, e_K) \subset R_N$ — вектор из ортогонального дополнения к линейной оболочке векторов e_1, \dots, e_K , а g_j — коэффициенты Фурье разложения вектора f по системе векторов e_1, \dots, e_K : $g_j = (f, e_j)$, $j = 1, \dots, K$.

Выражение (5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{j=1}^K g_j A e_j + A f^- + \nu = \\ &= \sum_{j=1}^K g_j (\xi_j - \nu_j) + A f^- + \nu = (\Xi + N) g + A f^- + \nu, \end{aligned} \quad (14)$$

где $g = (g_1, \dots, g_K) \in R_K$. Таким образом, измерение вектора f с помощью прибора A , заданного тестовыми измерениями (12), можно рассматривать как измерение вектора $g = (g_1, \dots, g_K) \in R_K$, координаты которого являются коэффициентами Фурье разложения (13) проекции f на линейную оболочку $L(e_1, \dots, e_K) \subset R_N$, с помощью измерительного прибора $\Xi \in (R_K \rightarrow R_n)$, заданного с погрешностью, а задача сводится к оценке вектора $u = \sum_{j=1}^K g_j U e_j = \tilde{U} g$. Запись (14) существенно упрощает вычисления результата редукции и оперативной характеристики задачи (8). Заметим, что в (14), так же, как и в общем случае, не контролируется составляющая $(I - E_K E_K^*) f$ вектора f , ортогональная линейной оболочке $L(e_1, \dots, e_K) \subset R_N$ тестовых сигналов.

Результаты численного эксперимента

Описанные выше методы иллюстрирует следующий численный эксперимент. В схеме измерения (1) использовался прибор $A \in (R_{400} \rightarrow R_{300})$, задаваемый матрицей $A_{ij} = e^{-(i-j)^2/16}$. В качестве тестовых сигналов был взят набор из ста ортогональных векторов из пространства R_{400} , имеющих вид импульсов:

$$(e_k)_j = \begin{cases} 1, & j = 4(k-1) + 1, \dots, 4(k-1) + 4, \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases} \\ k = 1, \dots, 100; \quad j = 1, \dots, 400.$$

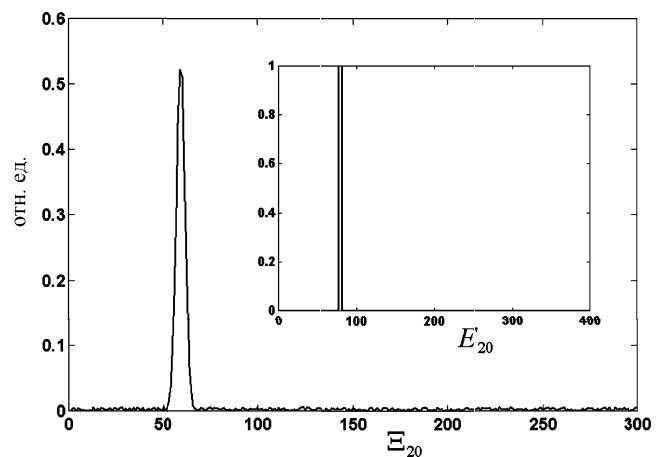


Рис. 1. График зависимости значения координаты вектора от ее номера для одного из тестовых сигналов (20-й вектор из 100) и для результата его измерения в тестирующем эксперименте

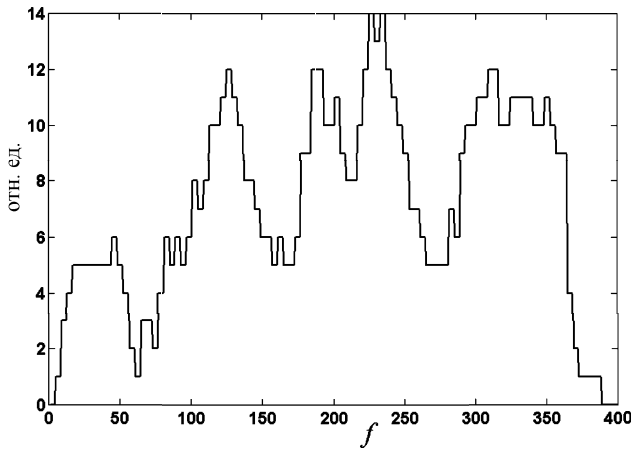


Рис. 2. График зависимости значения координаты вектора от ее номера для входного сигнала $f \in R_{400}$

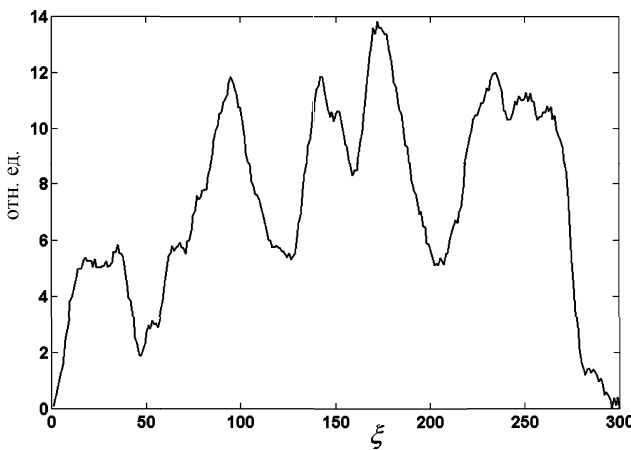


Рис. 3. Результат измерения ξ выходного сигнала Af прибора A в измерительном эксперименте при подаче на его вход сигнала f

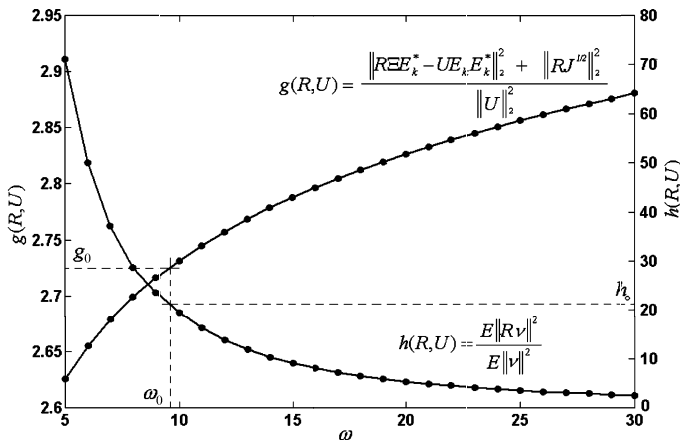


Рис. 4. Оперативная характеристика задачи (8) (относительные единицы погрешности (шума) и приборной невязки)

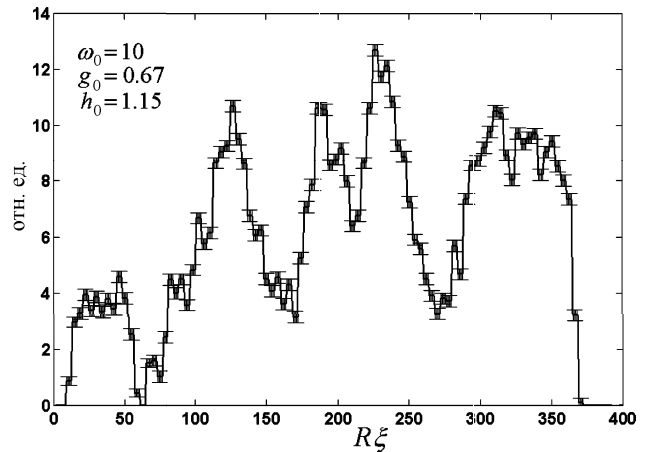


Рис. 5. Результат редукции к прибору $U = I$, $\omega = 10$. Относительная погрешность интерпретации при этом параметре $h_0 = 1.15$, приборная невязка $g_0 = 0.67$

приведен на рис. 2, результат его измерения представлен на рис. 3. Среднеквадратичная погрешность измерения каждой координаты выходного сигнала составила 3% от величины выходного сигнала Af , т.е. предполагалось, что тестирующие измерения более точны, чем измерения сигнала f . График оперативной характеристики с выбранным значением параметра $\omega = 10$ представлен на рис. 4. На рис. 5 приведен результат редукции вместе с погрешностью в каждой точке при $U = I$ на основании тестирующих измерений. При редукции была учтена неотрицательность координат вектора f [1].

Заключение

Таким образом, показано, что новый метод может быть применен для ряда задач анализа и интерпретации сигналов, полученных на измерительных приборах в случаях, когда оценка параметров модели измерений проводится на основе результатов тестирующего эксперимента. Показана работоспособность алгоритма на одномерной задаче.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-01-00579.

Литература

1. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М., 2002.
2. Чуликов А.И. Основы теории измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения (линейные стохастические измерительно-вычислительные системы). Тамбов, 2000.
3. Голубцов П.В., Пытьев Ю.П., Чуликов А.И. Построение оператора редукции по тестовым измерениям // Дискретные системы обработки сигналов. Устинов, 1986. С. 68.
4. Пытьев Ю.П. // Матем. сборник. 1982. **118(160)**, № 1(5). С. 19.

Отклик измерительного прибора на один из тестовых сигналов представлен на рис. 1. Каждое тестирующее измерение сопровождается погрешностью со среднеквадратичным отклонением, составляющим 1% от амплитуды выходного сигнала при подаче на вход некоторого тестового сигнала. Входной сигнал f измерительного эксперимента по схеме (1)

Поступила в редакцию 04.11.03