УДК 539.12.01:539.125.4:539.12.13

ОБРАТНЫЙ β^+-РАСПАД ПРОТОНА В ПРИСУТСТВИИ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

И. В. Мамсуров, Х. Гоударзи*)

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: goudarzia@phys.msu.ru

Получены спектры энергий и решения уравнения Дирака для заряженных и нейтральных фермионов с учетом взаимодействия аномальных магнитных моментов частиц с внешним полем. Найдена полная вероятность обратного бета-распада протона в присутствии сильного однородного магнитного поля с учетом аномальных магнитных моментов нуклонов.

Введение

В настоящей работе исследуется обратный β^+-распад протона в присутствии сильного однородного магнитного поля: $p^+ \to n + e^+ + \nu$. Здесь и ниже p^+ — протон, n — нейтрон, e^+ — позитрон, ν — нейтрино. Этот процесс становится энергетически разрешенным только при учете взаимодействия аномальных магнитных моментов (АММ) нуклонов с внешним магнитным полем. Данный процесс представляет особый интерес для астрофизики, поскольку подходящие для его протекания условия имеют место в нейтронных звездах, на поверхности которых магнитное поле может достигать 10^{15} Гс.

Прямой β^--распад нейтрона в сильном магнитном поле без учета АММ фермионов рассматривался ранее [1]. Так называемые урка-процессы

$$n \to p^+ + e^- + \tilde{\nu}, \quad p^+ + e^- \to n + \nu,$$

где e^- — электрон, $\tilde{\nu}$ — антинейтрино, как предполагают [2], поддерживают химическое равновесие в вырожденном идеальном газе нуклонов и электронов, которым в первом приближении моделируют вещество в центральной области нейтронной звезды.

В работах [3, 4] изучалось влияние сверхсильного вмороженного в нейтронную звезду магнитного поля на условия химического равновесия и уравнение состояния вырожденного газа нуклонов и электронов с учетом вкладов, обусловленных взаимодействием АММ нуклонов с магнитным полем.

Вначале получим решения уравнения Дирака с учетом взаимодействия АММ фермионов с внешним магнитным полем, являющиеся собственными функциями гамильтониана Дирака с АММ и оператора поляризации $\hat{\mu}_3$. Следует отметить, что эти задачи частично рассматривались в работах [5, 6].

Выберем систему единиц, где $\hbar = c = 1$.

1. Биспиноры и спектры энергий фермионов с учетом АММ

Уравнение Дирака для фермиона с АММ в присутствии постоянного и однородного магнитного поля имеет вид

$$i\partial_t \Psi = \hat{H}_D \Psi, \tag{1}$$

где

$$\hat{H}_D = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}) + m\rho_3 + M\rho_3(\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}), \quad \alpha = \rho_1 \mathbf{\Sigma},$$
$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ и $\rho_{1,3}$ — матрицы Дирака, $\sigma_{1,2,3}$ — матрицы Паули, $\mathbf{P} = i\boldsymbol{\nabla} - e\mathbf{A}$ — обобщенный импульс фермиона, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал электромагнитного поля, m — масса, e — заряд, M — аномальный магнитный момент фермиона, $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — четырехкомпонентный спинор.

Рассмотрим движение заряженного или нейтрального фермиона с АММ в постоянном и однородном магнитном поле, описываемом вектором потенциалом $\mathbf{A}$ в следующей калибровке:

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = Hx. \tag{3}$$

Биспинор $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ищем в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\varepsilon t}\Psi(\mathbf{r}).$$

Тогда для $\Psi(\mathbf{r})$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon - (m + MH))\Psi_1 - (P_1 - iP_2)\Psi_4 - P_3\Psi_3 = 0, \\
&(\varepsilon - (m - MH))\Psi_2 - (P_1 + iP_2)\Psi_3 + P_3\Psi_4 = 0, \\
&(\varepsilon + (m + MH))\Psi_3 - (P_1 - iP_2)\Psi_2 - P_3\Psi_1 = 0, \\
&(\varepsilon + (m - MH))\Psi_4 - (P_1 + iP_2)\Psi_1 + P_3\Psi_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Вначале рассмотрим случай заряженного фермиона (протона). Волновую функцию $\Psi(\mathbf{r})$ будем искать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{L}\exp\left(ip_2 y + ip_3 z\right) f, \tag{5}$$

*) Университет «Орумия», физический факультет. Орумия, Иран.

$$f = \begin{bmatrix} C_1 u_{n-1}(\eta) \\ iC_2 u_n(\eta) \\ C_3 u_{n-1}(\eta) \\ iC_4 u_n(\eta) \end{bmatrix}, \quad \eta = \sqrt{2\gamma}x + \frac{p_2}{\sqrt{2\gamma}}, \quad \gamma = \frac{eH}{2},$$

где $u_n(\eta)$ — функции Эрмита.

Подставляя (5) в (4), получим систему линейных уравнений для коэффициентов C_i:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon \mp (m + MH))C_{1,3} - \sqrt{4n\gamma}C_{4,2} - p_3 C_{3,1} = 0, \\ &(\varepsilon \mp (m - MH))C_{2,4} - \sqrt{4n\gamma}C_{3,1} + p_3 C_{4,2} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из условия равенства нулю определителя системы находим спектр энергии $\varepsilon^{(n)}$ (см. также [5]):

$$\varepsilon^{(n)} = \sqrt{p_3^2 + (\sqrt{m^2 + 4n\gamma} + sMH)^2}, \quad s = \pm 1. \tag{7}$$

Можно показать, что с $\hat{H}_D$ коммутирует оператор $\hat{\mu}_3$ [7]:

$$\hat{\mu}_3 = m\Sigma_3 + \rho_2 \left[\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}\right]_3, \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

который описывает спиновые состояния фермиона: проекцию спина протона на направление магнитного поля. Поэтому

$$\hat{\mu}_3 \Psi = K_0 \Psi,$$

где K_0 — собственное значение $\hat{\mu}_3$.

Из последного уравнения следует, что коэффициенты C_i удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^{(n)} - K_0 - MH)C_1 = +p_3 C_3, \\ &(\varepsilon^{(n)} + K_0 + MH)C_2 = -p_3 C_4, \\ &(\varepsilon^{(n)} + K_0 + MH)C_3 = +p_3 C_1, \\ &(\varepsilon^{(n)} - K_0 - MH)C_4 = -p_3 C_2. \end{aligned} \tag{9}$$

При получении этой системы мы воспользовались соотношением

$$\hat{\mu}_3 \Psi = (\varepsilon^{(n)} \rho_3 \Sigma_3 - i\rho_2 p_3)\Psi.$$

Из системы (9) получаем выражение для собственного значения оператора $\hat{\mu}_3$:

$$K_0 = -MH + s\sqrt{\varepsilon^{(n)2} - p_3^2}, \quad s = \pm 1. \tag{10}$$

Коэффициенты C_i можно найти, решая совместно уравнения (6) и (9). При этом оказывается, что решение существует только если знаки s в выражениях (7) и (10) противоположны. Таким образом, получается следующее правило согласования знаков:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{(n)} = \sqrt{p_3^2 + (\sqrt{m^2 + 4n\gamma} + sMH)^2}, \\ &K_0 = -MH - s\sqrt{\varepsilon^{(n)2} - p_3^2}, \quad s = \pm 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{4} |C_i|^2 = 1, \tag{12}$$

для C_i получаем:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = (1 + A^2)^{-1/2}(1 + B^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -AB \\ A \\ B \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где

$$A = \frac{\varepsilon^{(n)} - K_0 - MH}{p_3}, \quad B = -\frac{K_0 + m + 2MH}{\sqrt{4n\gamma}}.$$

Заметим, что эти коэффициенты не обращаются в бесконечность при $p_3 = 0$, $n = 0$.

В случае нейтральной частицы (нейтрона) волновая функция и спектр энергии имеют вид соответственно:

$$\Psi_n(r) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(p_1 x + p_2 y + p_3 z)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}_n, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n^{(p_\perp)} = \sqrt{p_3^2 + (\sqrt{m_n^2 + p_-^2} + sM_n H)^2}, \\ &p_1^2 + p_2^2 = p_-^2, \quad s = \pm 1, \end{aligned} \tag{15}$$

где m_n — масса, M_n — АММ нейтрона.

Собственные значения оператора $\hat{\mu}_3$ (с $e = 0$) определяются формулой (10) с правилом согласования знаков (11). Коэффициенты C_i определяются формулой (13), в которой B имеет вид

$$B = -\frac{K_{0n} + m_n + 2M_n H}{p_-}. \tag{16}$$

2. Полная вероятность вблизи порога

Обратный процесс распада протона будем описывать лагранжианом

$$L = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_n \gamma_\mu (1 + \alpha\gamma_5)\Psi_p\right] \left[\bar{\Psi}_\nu \gamma^\mu (1 + \gamma_5)\Psi_{e^+}\right], \tag{17}$$

где G_F — константа Ферми, α — отношение констант аксиально-векторного и векторного взаимодействий G_A и G_V ($\alpha \approx 1.25$), γ_μ, γ_5 — матрицы Дирака. Рассмотрим процесс вблизи порога, т. е. когда

$$\Delta = m - MH - (m_n - M_n H) - m_e \ll eH \leqslant m_e,$$

где m_e — масса позитрона.

Волновую функцию позитрона можно получить из волновой функции протона, если заменить m на m_e и положить $M = 0$, так как в отличие от (кинематических) аномальных моментов нуклонов АММ позитрона имеет динамическую природу и в области значений рассматриваемых магнитных полей является исчезающей функцией магнитного поля (см., напр., [9]).

Волновую функцию нейтрино можно получить в виде

$$\Psi_\nu = \frac{1}{2L^{3/2}} e^{-i\varepsilon t + i\mathbf{pr}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix},$$

где

$$f_2 = \left(1 + \frac{p_3}{|\mathbf{p}|}\right)^{1/2}, \qquad f_1 = -\exp\left\{-i \operatorname{arctg} \frac{p_y}{p_x}\right\} \left(1 - \frac{p_3}{|\mathbf{p}|}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Вычисления проводим в системе отсчета, где протон покоится ($p_3 = 0,\ n = 0$). Так как мы рассматриваем процесс вблизи порога, в первом приближении можно пренебречь импульсом нейтрона по сравнению с m_n в коэффициентах C_i волновой функции. Тогда после интегрирования по пространственным координатам всех четырех частиц для квадрата модуля матричного элемента получаем следующее выражение:

$$|M|^2 = \frac{G_F^2}{4L^{10}} (1-\alpha)^2 \left(1 + \frac{p_{3\nu}}{|\bar{p}_\nu|}\right) \frac{(1+C)^2}{1+C^2} \times \exp\left[-\frac{p_{2e^+}^2 + (p_{1n} + p_{1\nu})^2}{4\gamma}\right], \tag{19}$$

где

$$C = \frac{\sqrt{m^2 + p_{3e^+}^2} - m}{p_{3e^+}}.$$

Полная вероятность обратного β-распада протона определяется следующим выражением:

$$W = \frac{L^{10}}{(2\pi)^5} \int \cdots \int |M|^2 \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_n - \varepsilon_{e^+} - \varepsilon_\nu) \times \delta(p_{3n} + p_{3e^+} + p_{3\nu}) \delta(p_{2n} + p_{2e^+} + p_{2\nu}) \times d^3p_n d^3p_\nu dp_{3e^+} dp_{2e^+}. \tag{20}$$

Мы учли, что вблизи порога вклад в сумму по n даст только член с $n = 0$. Сначала с помощью δ-функции по p_2 и p_3 проинтегрируем по импульсам позитрона, а затем с помощью δ-функции по энергии найдем области изменения импульсов нейтрона и нейтрино:

$$|p_{1n}| \leqslant \sqrt{2m_n\Delta}, \quad |p_{1\nu}| \leqslant \Delta, \qquad |p_{2n}| \leqslant \sqrt{2m_n\Delta}, \quad |p_{2\nu}| \leqslant \Delta, \qquad |p_{3n}| \leqslant \sqrt{2m_n\Delta}, \quad |p_{3\nu}| \leqslant \Delta. \tag{21}$$

С учетом малости Δ отсюда следует, что всюду в интеграле можно пренебречь импульсом нейтрино по сравнению с импульсом нейтрона. Далее, переходя к цилиндрическим координатам

$$d^3p_n d^3p_\nu = (2\pi)^2 p_{-n} dp_{-n} p_{-\nu}\, dp_{-\nu} dp_{3n} dp_{3\nu},$$

главный член вероятности рассматриваемого процесса получаем в виде

$$W \cong \frac{G_F^2}{32\pi^3} (1-\alpha)^2 \sqrt{2}\, m_e^5 \widetilde{\Delta}^{5/2}, \tag{22}$$

где $\widetilde{\Delta} = \Delta/m_e$.

Таким образом, полная вероятность распада оказывается пропорциональной $\widetilde{\Delta}^{5/2}$.

Отметим, что аналогами урка-процессов в кварковом веществе являются электрослабые распады $\underline{u}$ и $\underline{d}$ кварков. Эти распады можно также описать лагранжианом (17), в котором волновые функции протона и нейтрона нужно заменить соответственно волновыми функциями $\underline{u}$ и $\underline{d}$ кварков и, кроме того, положить параметр $\alpha = 1$. Если кварки обладают кинематическими АММ, то для вероятности распада $\underline{u}$ кварка в сильном магнитном поле можно использовать формулу (22), в которой следует положить $\alpha = 1$. Тогда главный член полной вероятности распада $\underline{u}$ кварка с АММ в сильном магнитном поле обратится в нуль. Следовательно, в этом приближении ($\propto \widetilde{\Delta}^{5/2}$) электрослабый распад $\underline{u}$ кварка с АММ в низшем энергетическом состоянии оказывается полностью (кинематически) запрещенным.

В заключение авторы выражают благодарность проф. В. Р. Халилову за постановку задачи, помощь в проведении вычислений и написании настоящей статьи, а также целый ряд полезных замечаний.

Литература

1. *Студеникин А.И.* // Ядерная физика. 1989. **49**. С. 1665.
2. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М., 1975.
3. *Халилов В.Р.* // ТМФ. 2002. **130**. С. 87.
4. *Khalilov V.R.* // Phys. Rev. 2002. **D65**. P. 036001; ТМФ. 2002. **133**. С. 103.
5. *Тернов И.М., Багров В.Г., Жуковский В.Ч.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1966. № 1. С. 21.
6. *Лоскутов Ю.М., Левентуев В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1970. № 5. С. 554.
7. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М., 1968.
8. *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. М., 1981.
9. *Khalilov V.R.* Electrons in Strong Electromagnetic Fields. Amsterdam, 1966.

Поступила в редакцию
17.10.03