ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958; 621.372.8

О РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВАХ ВОЛНОВОДА СО ВСТАВКОЙ

А. Н. Боголюбов, Д. И. Ермишин, М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

Построено явное решение задачи о возбуждении колебаний током в волноводе с заполнением типа локально-неоднородной вставки. Рассмотрены резонансные характеристики этой задачи.

Хорошо известно, что при резонансных частотах амплитуда вынужденных колебаний поля в волноводе растет как t или как $\sqrt{t}$ (см. [1]). Частоты, близкие к резонансным, тоже обладают рядом примечательных свойств, изучению которых и посвящена данная работа.

Весьма распространенным на практике является случай, когда в полый волновод

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1,\ y \in S\}$$

постоянного сечения S, заполненный однородным веществом с $q = 1$, перпендикулярно к оси Ox вставлена одна или несколько пластин с различными $q \neq 1$, т. е. $q(x)$ является кусочно-постоянной функцией x. В этом и даже более общем случае, когда $q(x, y)$ кусочно-непрерывна и зависит только от x, можно доказать существование бесконечной последовательности резонансных частот, если $q(x) \geqslant 1$ и $q(x) \not\equiv 1$ (см. [2, 3 раздел 2.2, 4]).

Рассмотрим теперь следующую задачу о возбуждении колебаний финитным током $f(x, y)e^{-i\omega t}$:

$$\begin{aligned} &\Delta u + \omega^2 q(x) u = f, \quad (x, y) \in \Omega, \\ &u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющее вдоль разрывов условиям сопряжения

$$[u] = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0$$

и парциальным условиям излучения на бесконечности, и выясним, чем отличаются ее решения при частотах, близких к резонансным и удаленных от них.

Сначала рассмотрим тот случай, когда распределение тока действует на ловушку извне, т. е. носители f и $q - 1$ не пересекаются.

Расположим оси так, чтобы ловушка $q - 1 \neq 0$ лежала при $x > 0$, а распределение тока f — при $x < -l$. В силу фредгольмовости задачи (1) ее решение существует при всех нерезонансных частотах. Поэтому, следуя методу, развитому в [2], его можно разложить в ряд по собственным функциям ψ_n задачи Дирихле на сечении S:

$$u(x, y;\, \lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x;\, \lambda)\psi_n(y),$$

где α_n^2 — соответствующие собственные значения, а $u_n(x; \lambda) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$. Для них из (1) получаем задачу

$$u_n'' + \left(\omega^2 q - \alpha_n^2\right) u_n = f_n \tag{2}$$

с парциальными условиями излучения

$$u_n \sim e^{-\gamma'(\omega)|x|},$$

где $\gamma' = \sqrt{\alpha_n^2 - \omega^2}$ в смысле главного значения. Поскольку эти задачи при различных n независимы, можно всегда считать, что f_n имеет вид $f(x)\psi_n(y)$, а общий случай рассматривать как суперпозицию таких токов.

Для того чтобы вычислить $u(x)$ при различных токах вида $f(x)\psi_n(y)$, рассмотрим две вспомогательные задачи.

I. При $x < 0$

$$\begin{aligned} &u'' + (\omega^2 - \alpha^2)u = f, \\ &u|_{x=0} = \mu, \\ &u \sim e^{\gamma'(\omega)x} \text{ при } x = -\infty, \end{aligned} \tag{3}$$

где α — параметр, равный одному из α_n, а μ — пока произвольный параметр. Решение уравнения

$$u'' + (\omega^2 - \alpha^2)u = f$$

строится методом вариации постоянных, и поэтому оно имеет вид

$$u(x) = \left[-\frac{1}{2\gamma'}\int_0^x f(z)e^{\gamma' z}dz + C_1\right]e^{-\gamma' x} + \\ + \left[\frac{1}{2\gamma'}\int_0^x f(z)e^{-\gamma' z}dz + C_2\right]e^{\gamma' x}.$$

Учитывая условия излучения и условие при $x = 0$, получаем

$$u(x) = -\frac{1}{2\gamma'}\left[\int_0^x f(z)e^{\gamma' z}dz + F\right]e^{-\gamma' x} + \\ + \left[\mu + \frac{1}{2\gamma'}\left(\int_0^x f(z)e^{-\gamma' z}dz + F\right)\right]e^{\gamma' x}.$$

Для производной в точке $x=0$ имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \gamma'\mu + F. \tag{4}$$

II. При $x>0$

$$\begin{aligned} &u'' + (\omega^2 q(x) - \alpha^2)u = 0, \\ &u|_{x=0} = \mu, \\ &u \sim e^{\gamma'(\omega)x} \text{ при } x = +\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение этой задачи можно получить, сшивая решения при различных q. Так, в частности, в случае простой вставки, когда

$$q(x) = \begin{cases} q, & x\in(0,2), \\ 1 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{6}$$

решение неизбежно имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} \mu\cos(\gamma x) + C_1\sin(\gamma x), & x\in(0,2), \\ C_2 e^{-\gamma' x} & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\gamma = \sqrt{\omega^2 q - \alpha^2}$. Здесь константны C_1 и C_2 определяются условиями сопряжения при $x=2$:

$$C_1 = \mu\frac{\gamma\sin 2\gamma - \gamma'\cos 2\gamma}{\gamma'\sin 2\gamma + \gamma\cos 2\gamma} \equiv \mu R(\omega),$$

$$C_2 = \mu(\cos 2\gamma - R(\omega)\sin 2\gamma)e^{2\gamma'}.$$

Поэтому решение при малых x имеет вид

$$u = \mu\left\{\cos\gamma x + R(\omega)\sin\gamma x\right\}$$

и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu\gamma R. \tag{7}$$

Приравнивая правые части (4) и (7), мы получаем уравнение для определения параметра μ. Это уравнение линейное, поэтому решение его пишется сразу:

$$\mu = \rho(\omega)F[f],$$

где

$$\rho = -\frac{\gamma'\sin 2\gamma + \gamma\cos 2\gamma}{(\gamma'^2 - \gamma^2)\sin 2\gamma + 2\gamma\gamma'\cos 2\gamma}.$$

(Заметим сразу, что ρ не зависит от выбора f, а F является целой функцией $\gamma'(\omega)$ и, следовательно, не обращается в бесконечность при конечных частотах.) Тем самым построение решения исходной задачи завершено.

Свойства решения существенно различны при $\omega<\alpha$ и $\omega>\alpha$. Рассмотрим эти случаи раздельно.

1. Область резонансов $\omega<\alpha$. Решение существует при всех ω, отличных от резонансных частот, вычисленных в [2], — это в точности корни знаменателя $\rho(\omega)$. При больших $|x|$ решение экспоненциально убывает; почти при всех частотах поле не проникает сколько-нибудь существенным образом внутрь ловушки, исключение составляют частоты, близкие к резонансным (рис. 1). Способность проникновения поля в ловушку удобно характеризовать значениями ρ. Обратим внимание на то, что график зависимости ρ от ω имеет очень крутые максимумы (рис. 2). К сожалению, отмеченный эффект пропадает при росте расстояния l; это связано с экспоненциальным убыванием $F[f]$ как функции l. Поэтому в задачах, близких к пределу задач теории дифракции ($l=\infty$), поле не проникает в ловушку при всех частотах, отличных от резонансных.

2. Область излучения $\omega>\alpha$. Решение существует при всех ω, но соотношение между амплитудами волны, прошедшей через ловушку (т. е. поле u при

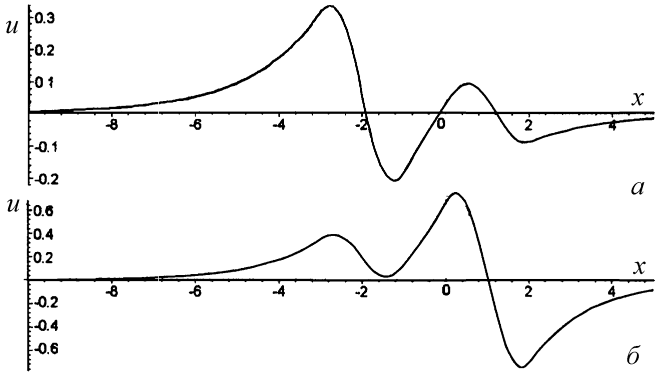

Рис. 1. Вид $u(x)$: (*а*) при обычной частоте ($\omega=0.8$); (*б*) при частоте, близкой к резонансной ($\omega=0.7$)

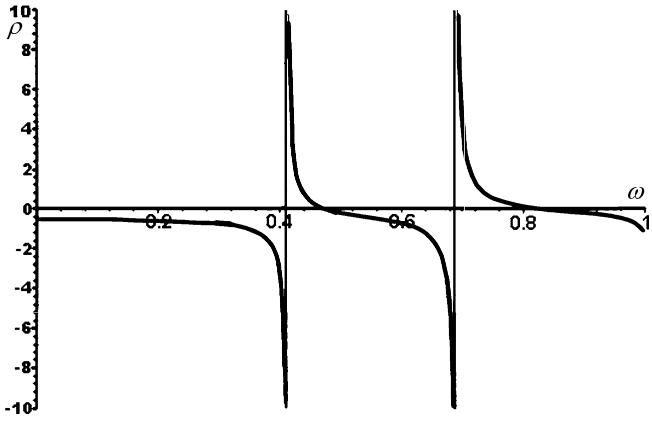

Рис. 2. График зависимости ρ от частоты ω

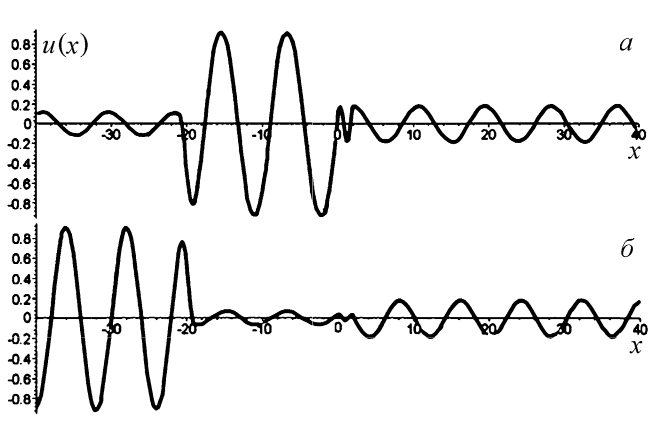

Рис. 3. Вид $u(x)$ в случае: (*а*) максимума ρ ($\omega=1.23$); (*б*) минимума ρ ($\omega=1.27$)

$x > 2$), и волны, отраженной от ловушки (т. е. поле u при $x \ll 0$), существенно зависит от частоты. При одних частотах почти все поле отражается, при других почти все проходит сквозь ловушку (рис. 3).

Таким образом, свойства, подобные резонансным, сохраняются и при частотах больших α, только теперь численные значения максимумов прохождения через ловушку существенно зависят от f.

Рассмотрим теперь случай, когда носители f и $q-1$ пересекаются, т. е., например, для уже рассмотренной нами вставки (6) возьмем функцию следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (0,a), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где a — ширина волновода. Для определенности положим $a = 2$.

Аналогично изложенному выше для $u_n(x;\lambda)$ из (1) получаем задачу (2). Теперь уже, чтобы вычислить $u(x)$ при различных токах вида $f(x)\psi_n(y)$, удобнее рассмотреть вспомогательные задачи в несколько ином порядке.

I. При $x < 0$

$$u'' + (\omega^2 - \alpha^2)u = 0,$$
$$u|_{x=0} = \mu_1,$$
$$u \sim e^{\gamma'(\omega)x} \text{ при } x = -\infty.$$

Решение этой системы, а также его производная имеют вид

$$u(x) = \mu_1 e^{\gamma'(\omega)x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu_1 \gamma'(\omega) e^{\gamma'(\omega)x}. \tag{8}$$

II. При $x > 2$

$$u'' + (\omega^2 - \alpha^2)u = 0,$$
$$u|_{x=2} = \mu_2,$$
$$u \sim e^{-\gamma'(\omega)x} \text{ при } x = +\infty.$$

Решение этой системы аналогично предыдущей имеет вид

$$u(x) = \mu_2 e^{-\gamma'(\omega)x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu_2 \gamma'(\omega) e^{-\gamma'(\omega)x}. \tag{9}$$

Коэффициенты μ_1 и μ_2 — некоторые константы, которые еще надо будет определить.

III. При $0 < x < 2$

$$u'' + (\omega^2 q(x) - \alpha^2)u = f,$$
$$u|_{x=0} = \mu_1,$$
$$u|_{x=2} = \mu_2.$$

Используя метод вариации постоянных, получаем следующий вид решения:

$$u(x) = \left[-\frac{1}{2\gamma} \int\limits_0^x f(z) e^{\gamma z} dz + C_1 \right] e^{-\gamma x} + \left[\frac{1}{2\gamma} \int\limits_0^x f(z) e^{-\gamma z} dz + C_2 \right] e^{\gamma x}.$$

Константы C_1 и C_2 выражаются из условий сопряжения (8) и (9) при $x = 0$:

$$\begin{cases} C_1 = \mu_1 \dfrac{\gamma - \gamma'}{2\gamma}, \\ C_2 = \mu_1 \dfrac{\gamma + \gamma'}{2\gamma}. \end{cases}$$

Решение принимает вид

$$u(x) = \left[-\frac{1}{2\gamma} \int\limits_0^x f(z) e^{\gamma z} dz + \mu_1 \frac{\gamma - \gamma'}{2\gamma} \right] e^{-\gamma x} + \left[\frac{1}{2\gamma} \int\limits_0^x f(z) e^{-\gamma z} dz + \mu_1 \frac{\gamma + \gamma'}{2\gamma} \right] e^{\gamma x}. \tag{10}$$

Остается только найти параметры μ_1 и μ_2, которые выражаются из условий сопряжения (9) и (10) в точке $x = 2$:

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{e^{-2\gamma} F_+ (\gamma' - \gamma) - e^{2\gamma} F_- (\gamma' + \gamma)}{e^{2\gamma}(\gamma' + \gamma)^2 - e^{-2\gamma}(\gamma' - \gamma)^2}, \\ \mu_2 = e^{2(\gamma' + \gamma)} \dfrac{1}{\gamma - \gamma'} (F_- + \mu_1(\gamma' + \gamma)), \end{cases}$$

где $F_+ = \int\limits_0^2 f(z) e^{\gamma z} dz$ и $F_- = \int\limits_0^2 f(z) e^{-\gamma z} dz$.

Рассмотрим опять же раздельно случаи $\omega < \alpha$ и $\omega > \alpha$.

1. Область резонансов $\omega < \alpha$. Решение существует при всех нерезонансных частотах, но теперь поведение решения при частотах, близких к резонансным, сильно зависит от характера функции f. Это хорошо видно по графикам зависимости амплитуды μ_1 от частоты ω. На рис. 4 изображены зависимости для различных носителей f вида

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (0,a), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $\varphi(x) = f_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right)$ при второй резонансной частоте правая часть уравнения оказывается ортогональной собственным функциям, и резонанса при этой частоте не наблюдается.

Если же взять $\varphi(x) = f_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right)$, то наоборот: резонанс пропадает для первой частоты, так как при ней функция f ортогональна собственным функциям.

На рис. 4 также показан случай, когда f уже не является ортогональной собственным функциям ни

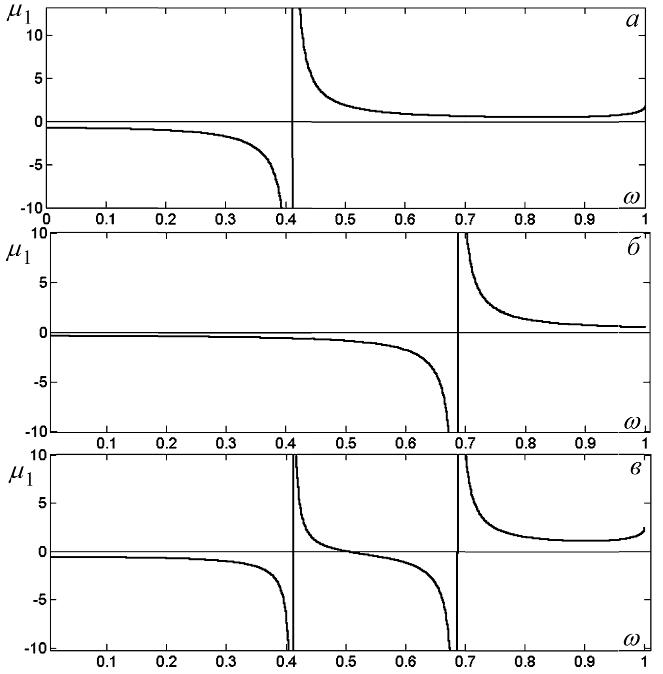

Рис. 4. График зависимости μ_1 от частоты ω для: (*а*) $f = f_0 \sin(\pi x/a)$; (*б*) $f = f_0 \sin(2\pi x/a)$; (*в*) $f = f_0 \sin(1.5\pi x/a)$

при одной резонансной частоте. Это можно наблюдать, например, при $\varphi(x) = f_0 \sin\left(1.5\pi \frac{x}{a}\right)$.

Зависимость $u(x)$ для различных частот представлена на рис. 5.

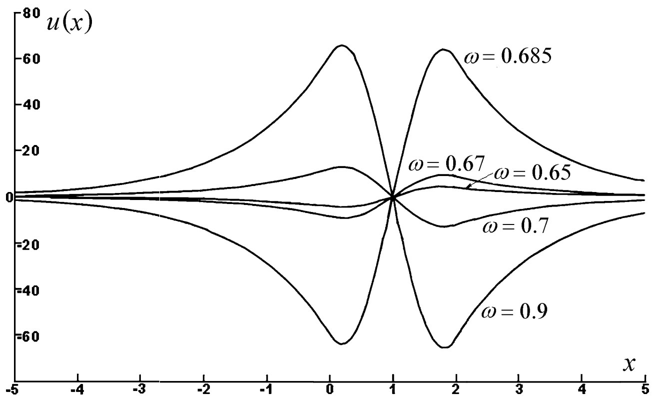

Рис. 5. График $u(x)$ при $f = f_0 \sin(2\pi x/a)$, $q = 10$, $\alpha = 1$

2. Область излучения $\omega > \alpha$. Возьмем носитель

$$\varphi(x) = f_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right).$$

Решение существует при всех ω. Если рассматривать зависимость амплитуды волны, выходящей из ловушки (т. е. поле u при $x < 0$ и поле u при $x > 2$), от частоты, то можно увидеть максимумы и минимумы амплитуд (рис. 6). Таким образом, существуют частоты наилучшего и наихудшего пропускания.

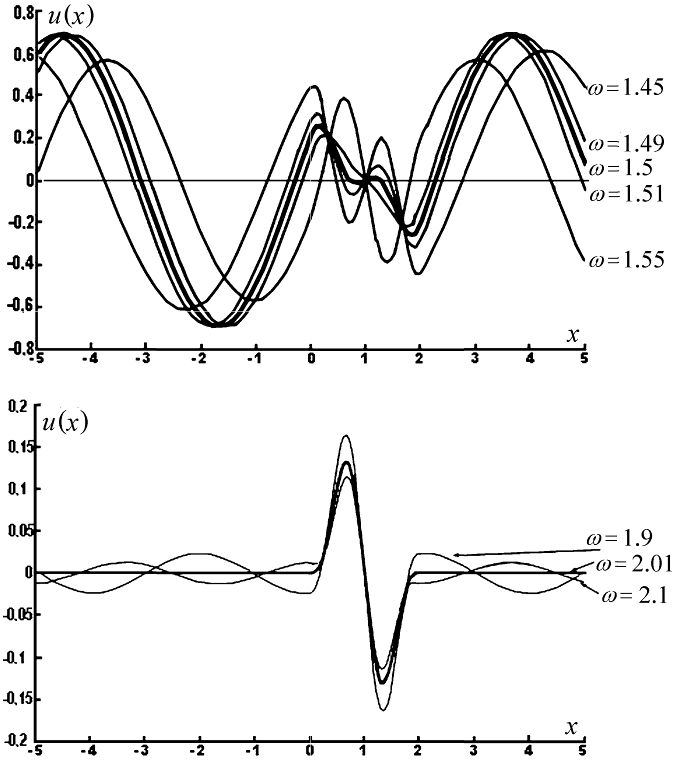

Рис. 6. График $u(x)$ при $f = f_0 \sin(2\pi x/a)$, $q = 10$, $\alpha = 1$ для различных ω

Эти частоты не принадлежат резонансному множеству. Они обладают тем же свойством, что и резонансные в первой задаче, только этот эффект наблюдается и в дальней зоне. Главное их отличие от резонансных — это сильная зависимость от заданного тока.

Литература

1. *Werner P.* // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, N 4. S. 43.
2. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. N 5. P. 29).
3. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // ЖВМиМФ. 2002. **42**, №12. С. 1.
4. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**, №6. С. 744.

Поступила в редакцию
01.10.03