АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12

МНОГОЧЛЕНЫ ЭЙЛЕРА И ПРОБЛЕМА НАХОЖДЕНИЯ КРАТНОСТИ СОСТОЯНИЙ МНОГОФОНОННОЙ СИСТЕМЫ

В. С. Замиралов

(*НИИЯФ*)

E-mail: zamir@depni.sinp.msu.ru

Показано, что кратность состояний многофононной системы с определенным значением проекции полного момента системы при разложении прямого произведения угловых моментов $j=2$ может быть найдена из решения задачи Эйлера о построении чисел от 3 до 9 как суммы трех чисел из набора от 1 до 5.

В этой заметке будет показано, что проблема нахождения кратности состояний с определенным значением проекции J_3 полного углового момента системы J при разложении прямого произведения угловых моментов нескольких фононов с угловым моментом j, $J=j\times j\times\ldots\times j$ сводится к проблеме построения заданного числа как суммы целых чисел, которая в свою очередь решается обращением к разложению Эйлера некоторой конечной или бесконечной дроби [1].

Удобно продемонстрировать эту связь на хорошо известной задаче с прямым произведением нескольких фононов с $j=2$.

Итак, пусть дано прямое произведение угловых моментов $j=2$ трех фононов. Проблема состоит в нахождении кратности состояний с определенным значением проекции J_3 полного углового момента системы J.

Обычно задача решается примерно следующим образом. Записываются возможные состояния (j_3^1, j_3^2, j_3^3) начиная с состояния с максимальным значением проекции, последовательно уменьшая величину проекции на единицу. Перебирая все возможные способы составить данное значение проекции полного углового момента трехфононного состояния из проекций отдельных фононов (j_3^k, $k=1,2,3$) [2, 3], получаем искомые кратности состояний для каждого определенного значениям проекции полного углового момента системы. Результат (в квадратных скобках) для значений проекции от $J_3=6$ до $J_3=0$ запишем следующим образом (1-я цифра в круглых скобках означает величину проекции (j_3^k, $k=1,2,3,$) фонона спина $j^k=2$, 2-я цифра означает всюду один фонон и пишется для удобства):

$$J_3=6\ [1]\quad (2.1\ 2.1\ 2.1)$$
$$J_3=5\ [1]\quad (2.1\ 2.1\ 1.1)$$
$$J_3=4\ [2]\quad (2.1\ 2.1\ 0.1)\ (2.1\ 1.1\ 1.1)$$
$$J_3=3\ [3]\quad (2.1\ 2.1\ -1.1)\ (2.1\ 1.1\ 0.1)\ (1.1\ 1.1\ 1.1)$$
$$J_3=2\ [4]\quad (2.1\ 2.1\ -2.1)\ (2.1\ 1.1\ -1.1)\ (2.1\ 0.1\ 0.1)\ (1.1\ 1.1\ 0.1)$$
$$J_3=1\ [4]\quad (2.1\ 1.1\ -2.1)\ (2.1\ 0.1\ -1.1)\ (1.1\ 0.1\ 0.1)\ (1.1\ 1.1\ -1.1)$$
$$J_3=0\ [5]\quad (1.1\ 1.1\ -2.1)\ (2.1\ 0.1\ -2.1)\ (2.1\ -1.1\ -1.1)\ (1.1\ 0.1\ -1.1)\ (0.1\ 0.1\ 0.1)$$

(В квадратных скобках, как уже сказано, указана искомая кратность трехфононного состояния с определенным J_3.)

Покажем теперь, что решение для трех фононов может быть сведено к задаче Эйлера о нахождении числа разбиений целых чисел некоторым определенным способом [1].

Удобно перейти от проекций j_3^k, $k=1,2,3$, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, к некоторому набору положительных целых чисел следующим образом. Из проекции каждого фонона вычитается 3 ($(j_3^{\max,k}+1)$, $k=1,2,3$, для $j=2$), с тем чтобы избавиться от нулей и положительных чисел. Затем изменяются все знаки на обратные, с тем чтобы иметь дело только с положительными целыми числами. Для каждой данной проекции $J_3=j_3^1+j_3^2+j_3^3$ получаем число, равное $(-J_3+9)$, составленное из трех целых чисел от 1 до 5, вообще говоря, несколькими способами. Числу 1 соответствует величина $(-j_3^{max,k}+3)$, а числу 5 — $(j_3^{max,k}+3)$. В итоге получается следующая последовательность чисел от 3 (соответствующему $J_3=6$) до 9 (соответствующему $J_3=0$), каждое из которых является суммой трех чисел, берущихся из набора целых чисел от 1 до 5:

$$J_3=6\quad 3=1+1+1;$$
$$J_3=5\quad 4=2+1+1;$$
$$J_3=4\quad 5=3+1+1,\ \ 5=2+2+1;$$
$$J_3=3\quad 6=4+1+1,\ \ 6=3+2+1,\ \ 6=2+2+2;$$

$$J_3 = 2 \quad 7 = 5+1+1,\ \ 7 = 4+2+1,\ \ 7 = 3+2+2,$$
$$7 = 3+3+1;$$
$$J_3 = 1 \quad 8 = 5+2+1,\ \ 8 = 4+3+1,\ \ 8 = 4+2+2,$$
$$8 = 3+3+2;$$
$$J_3 = 0 \quad 9 = 5+3+1,\ \ 9 = 4+4+1,\ \ 9 = 5+2+2,$$
$$9 = 4+3+2,\ \ 9 = 3+3+3.$$

Эта задача сводится к проблеме Эйлера о числе способов, которыми можно построить заданное число с помощью сложения целых чисел. Для ее решения он использовал бесконечную дробь [1]

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\dots}, \tag{1}$$

которая при выполнении деления разворачивается в выражение

$$\begin{aligned} 1 &+ z(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots) + \\ &+ z^2(x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \\ &\qquad + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \ldots) + \\ &+ z^3(x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + \\ &\qquad + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + \ldots). \end{aligned} \tag{2}$$

Как показано в [1], решение задачи дается коэффициентом N при члене $z^m x^n$. А именно, число n может быть получено N способами сложения m чисел. Например, из содержащегося в 5-й строке этого выражения одночлена

$$z^3(\ldots + 7x^9 + \ldots)$$

видно, что число $n = 9$ может быть получено сложением трех ($m = 3$) целых чисел 7-ю различными способами. Действительно, имеем

$$9 = 5+3+1,\ \ 9 = 4+4+1,\ \ 9 = 5+2+2,$$
$$9 = 4+3+2,\ \ 9 = 3+3+3,\ \ 9 = 6+2+1,$$
$$9 = 7+1+1.$$

Сравнивая эти разложения с полученными нами выше, видим, что у Эйлера число членов на два больше, чем получено в нашем примере. Это происходит потому, что в нашем примере исключены разложения $9 = 6+2+1$ и $9 = 7+1+1$, в которых есть числа 6 и 7, поскольку мы ограничены числом проекций фонона с $j = 2$, которое равно пяти.

И если мы хотим свести задачу нахождения кратности состояний для нашего случая трехфононной задачи с фононами $j = 2$ к задаче Эйлера, то следует исключить из рассмотрения построение заданного числа числами большими 5. Иными словами, мы решаем задачу Эйлера, которая теперь звучит так: найти все способы построения чисел от 3 до 9 как суммы трех целых чисел, причем допустимые целые числа суть $1, 2, 3, 4, 5$. Она решается обращением к многочлену Эйлера в виде конечной дроби

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)}. \tag{3}$$

При делении это выражение дает произведение многочленов, в которых мы оставляем члены до z^3 включительно (у нас три фонона):

$$\begin{gathered}(1 + xz + x^2z^2 + x^3z^3) \cdot (1 + x^2z + x^4z^2 + x^6z^3) \times \\ \times (1 + x^3z + x^6z^2 + x^9z^3) \cdot (1 + x^4z + x^8z^2 + x^{12}z^3) \times \\ \times (1 + x^5z + x^{10}z^2 + x^{15}z^3).\end{gathered}$$

Ограничение пятью сомножителями в знаменателе как раз и задает требуемое условие о составлении заданного числа только из чисел от 1 до 5. Остается перемножить эти многочлены и убедиться, что коэффициент N при члене $x^n z^3$, $3 \leqslant n \leqslant 9$, дает кратность состояний системы из трех фононов с $j = 2$ и с проекцией $(-n + 9)$:

$$z^3(1x^3 + 1x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 4x^8 + 5x^9).$$

Вынося x^9 за скобку, получаем в скобках выражение, где множитель при x есть искомая кратность состояния с проекцией, равной $\pm$ степени x:

$$z^3x^9(1x^{-6} + 1x^{-5} + 2x^{-4} + 3x^{-3} + 4x^{-2} + 4x^{-1} + 5x^0). \tag{4}$$

Многочлен Эйлера (3) дает решение задачи о нахождении кратности полного углового момента системы фононов J с определенным значением проекции J_3 для произвольного числа фононов. Например, решение для случая произведения четырех фононов с $j = 2$ сводится к следующей задаче: найти все способы построения чисел от 4 (соответствующему $J_3 = 8$) до 12 (соответствующему $J_3 = 0$), как суммы четырех целых чисел, причем допустимые числа — опять $1, 2, 3, 4, 5$. Она решается с помощью многочлена (3), только теперь ищутся коэффициенты N при членах $x^n z^4$, $4 \leqslant n \leqslant 12$, которые и дают кратности состояний системы из четырех фононов с $j = 2$ с проекцией $\pm(-n + 12)$:

$$\begin{aligned} &z^4(1x^4 + 1x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \\ &\qquad\qquad + 7x^{10} + 7x^{11} + 8x^{12}) = \\ &= z^4x^{12}(1x^{-8} + 1x^{-7} + 2x^{-6} + 3x^{-5} + 5x^{-4} + \\ &\qquad\qquad + 5x^{-3} + 7x^{-2} + 7x^{-1} + 8x^0) \end{aligned}$$

Эти коэффициенты N равны числу способов, которыми можно построить заданное число (равное степени x) в виде суммы четырех чисел из целых чисел от 1 до 5:

$$J_3 = 8 \quad 4 = 1+1+1+1;$$
$$J_3 = 7 \quad 5 = 2+1+1+1;$$
$$J_3 = 6 \quad 6 = 3+1+1+1,\ \ 6 = 2+2+1+1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J_3 = 0 \quad 12 = 5+4+2+1,\ \ 12 = 5+5+1+1,$$

$$12 = 5 + 3 + 2 + 2, \quad 12 = 4 + 4 + 3 + 1,$$
$$12 = 5 + 3 + 3 + 1, \quad 12 = 4 + 4 + 2 + 2,$$
$$12 = 4 + 3 + 3 + 2, \quad 12 = 3 + 3 + 3 + 3.$$

Можно убедиться непосредственным вычислением, что число способов разбиения каждого из приведенных чисел от 4 до 12 на сумму четырех чисел соответствует кратности четырехфононных состояний с проекцией полного момента от ± 8 до 0.

Установленная связь между величиной кратности проекции полного углового момента системы частиц с $j = 2$ и задачей Эйлера о количестве разбиений заданного целого числа на сумму целых чисел носит общий характер и, понятно, не ограничивается рассмотренным здесь случаем фононов с угловым моментом, равным двум. Помимо математического интереса она представляет интерес как основа чрезвычайно простой программы для расчета соответствующих кратностей.

Автор благодарит И. М. Капитонова и С. С. Баранова за обсуждение.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-1619.2003.2 для ведущих научных школ.

Литература

1. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. 1. М., 1961.
2. *Benedetti S.* Nuclear Reactions. New York; London; Sydney, 1965.
3. *Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Орлин В.Н.* Модели атомных ядер. М., 1997.

Поступила в редакцию
10.03.04