РАДИОФИЗИКА

УДК 533.951.8

ХАРАКТЕР НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ СВЯЗИ ДВУХ ВЕТВЕЙ СПЕКТРА КОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ ПОЛОСЫ НЕПРОЗРАЧНОСТИ

И. Н. Карташов, М. В. Кузелев

(*кафедра физической электроники*)

E-mail: kartashov@ph-elec.phys.msu.su

Рассмотрена задача развития неустойчивости системы, которая обусловлена наличием двух связанных волн вблизи полосы непрозрачности. Показано, что в этом случае система является абсолютно неустойчивой. Найдены инкременты развития неустойчивости.

Исследование устойчивости системы относительно малых монохроматических возмущений сводится к решению дисперсионного уравнения $D(\omega, k) = 0$, которое получается в результате линеаризации «уравнений движения» системы относительно малых возмущений вида $\exp(-i\omega t + ikx)$. Частота $\omega = \omega(k)$ определяет временну́ю динамику развития возмущений с волновым числом k. Если мнимая часть частоты положительна ($\mathrm{Im}\,\omega > 0$) в некоторой области k, то амплитуда возмущений экспоненциально нарастает со временем и система неустойчива. Однако на основании лишь знака $\mathrm{Im}\,\omega$ нельзя делать вывод о росте возмущений в фиксированной точке пространства.

Реально возмущение представляет собой не монохроматическую волну, а совокупность таких волн — волновой пакет. Монохроматические волны, входящие в пакет, экспоненциально нарастают, а сам волновой пакет при этом сносится. Конкуренция этих двух противоположных факторов — роста амплитуды возмущений при $t \to \infty$ за счет неустойчивости и уменьшения за счет перемещения ограниченного в пространстве пакета — и определяют поведение возмущений в фиксированной точке пространства x.

Для адекватного описания динамики развития возмущений в неустойчивой системе требуется, вообще говоря, решение начальной задачи. Однако можно показать, что при $t \to \infty$ характер неустойчивости определяется исключительно дисперсионным уравнением и от вида начальных условий не зависит [1–4]. Если возмущения в фиксированной точке неустойчивой системы нарастают со временем, то в таком случае говорят об абсолютной неустойчивости. Если же эти возмущения не нарастают в фиксированной точке x (обычно стремятся к нулю), то говорят о конвективной (сносовой) неустойчивости. Характер неустойчивости определяется точками ветвления функций $k = k(\omega)$ — решений дисперсионного уравнения. Если найдется хотя бы одна точка ветвления $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ с положительной мнимой частью $\omega_2 > 0$, причем это есть точка ветвления волн $k = k(\omega)$, соответствующих различным направлениям распространения, то система является абсолютно неустойчивой. Если таких точек ветвления в неустойчивой системе нет, то неустойчивость конвективна.

Рассмотрим дисперсионное уравнение для двух связанных волн

$$(\omega - \omega_p(k))(\omega - ku - \omega_b(k)) = \theta. \tag{1}$$

Такое уравнение описывает, например, неустойчивость электронного пучка, движущегося со скоростью u в плазме в режиме коллективного эффекта Черенкова [5, 6]. Функции $\omega_p(k)$ и $\omega_b(k)$ определяют спектр частот плазменной и пучковой волн соответственно. Параметр θ задает связь двух волн, причем его знак может быть, как положительным, так и отрицательным. Наиболее сильная связь двух волн имеет место вблизи точки пересечения их дисперсионных кривых, которая находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_p(k_0), \\ \omega_0 &= k_0 u + \omega_b(k_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагая волновой пакет достаточно узким и разлагая функции $\omega_{p,b}(k)$ в ряд относительно $k - k_0$, ограничившись линейным приближением, получим

$$(\omega - \omega_0 - v_p(k - k_0))(\omega - \omega_0 - v_b(k - k_0)) = \theta, \tag{3}$$

где $v_p = \frac{\partial \omega_p}{\partial k}(k_0)$, $v_b = u + \frac{\partial \omega_b}{\partial k}(k_0)$ — групповые скорости волн.

Характер неустойчивости системы с таким дисперсионным уравнением определяется правилами Стэррока. Возможны четыре различных случая [1–4].

1) Если $v_p v_b > 0$, $\theta > 0$, то вещественным $k - k_0$ соответствуют вещественные $\omega - \omega_0$, вещественным $\omega - \omega_0$ соответствуют вещественные $k - k_0$, а значит, система устойчива и волны распространяются без усиления.

2) Если $v_p v_b < 0$, $\theta > 0$, то вещественным $k - k_0$ соответствуют вещественные $\omega - \omega_0$, а значит, система устойчива. Вещественным $\omega - \omega_0$ в некоторой области частот соответствуют комплексно сопряжен-

ные $k - k_0$. Мнимые части $k - k_0$ означают не усиление в одном из направлений, а затухание в противоположном (непропускание колебаний).

3) Если $v_p v_b > 0$, $\theta < 0$, то вещественным $k - k_0$ в некоторой области соответствуют комплексно сопряженные $\omega - \omega_0$, а значит, система конвективно неустойчива. Вещественным $\omega - \omega_0$ в некоторой области частот соответствуют комплексно сопряженные $k - k_0$. Наличие мнимых частей у $k - k_0$ означает усиление.

4) Если $v_p v_b < 0$, $\theta < 0$, то вещественным $k - k_0$ в некоторой области соответствуют комплексно сопряженные $\omega - \omega_0$, вещественным $\omega - \omega_0$ соответствуют вещественные $k - k_0$, при этом система абсолютно неустойчива и стационарное состояние не устанавливается.

Вблизи полосы непрозрачности системы групповая скорость одной из волн равна нулю и необходим учет следующего члена разложения по $k - k_0$. Полагая $v_p = 0$, преобразуем дисперсионное уравнение к виду:

$$\left(\omega - \omega_0 - \alpha(k - k_0)^2\right)\left(\omega - \omega_0 - v_b(k - k_0)\right) = \theta. \quad (4)$$

Вводя новые безразмерные переменные перепишем (4)

$$\left(\tilde{\omega} - \tilde{\alpha}\tilde{k}^2\right)(\tilde{\omega} - \tilde{k}) = \tilde{\theta}, \quad (5)$$

где $\tilde{\theta} = \pm 1$ [6]. В дальнейшем знак тильды опускаем, сохранив таким образом прежние обозначения, а также считаем, что $\alpha > 0$. Уравнение, аналогичное (5) при $\omega \ll k$ во втором множителе, рассматривалось в [7]. Однако такое пренебрежение фактически приводит к уравнению, описывающему устойчивые колебания, а также искажает асимптотику корней $k(\omega)$ при $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$, что существенно для классификации волн по направлениям распространения. В настоящей работе анализируется дисперсионное уравнение с точной зависимостью от частоты.

Решения $\omega(k)$ уравнения (5) имеют вид

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{k(\alpha k + 1) \pm \sqrt{k^2(\alpha k - 1)^2 + 4\theta}\right\}. \quad (6)$$

Если $\theta = +1$, то подкоренное выражение в (6) всегда положительно, а значит, оба значения ω вещественны и система устойчива. Любое начальное возмущение не будет нарастать со временем. Поведение дисперсионных кривых в этом случае для $\alpha = 1$ показано на рис. 1. Пунктирные линии представляют собой дисперсионные кривые, определяемые уравнениями $\omega - \alpha k^2 = 0$ и $\omega - k = 0$, сплошные линии — решение дисперсионного уравнения (5) с учетом связи волн.

При $\theta = -1$ в области волновых чисел, определяемых неравенствами

$$-2 < k(\alpha k - 1) < 2, \quad (7)$$

частоты ω — решения дисперсионного уравнения (5) становятся комплексно сопряженными и в системе

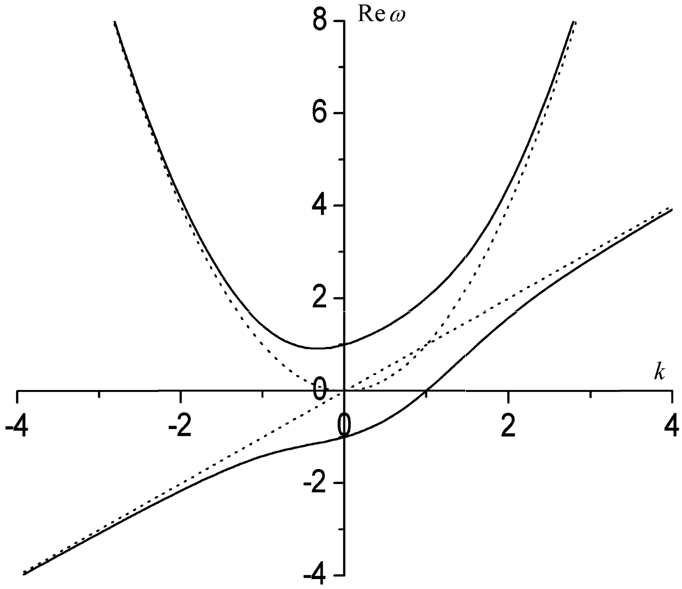

Рис. 1. Дисперсионные кривые при $\theta = 1$, $\alpha = 1$. Штрихованные кривые — те же волны в отсутствие связи

развивается неустойчивость. Решая систему неравенств (7) для случая $\alpha > 0$, определяем, что при $\alpha > 1/8$ волновые числа k, при которых развивается неустойчивость, расположены в следующей области:

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 8\alpha}}{2\alpha} < k < \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha}}{2\alpha}. \quad (8)$$

В случае же $\alpha < 1/8$ таких областей две:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1 + 8\alpha}}{2\alpha} < k < \frac{1 - \sqrt{1 - 8\alpha}}{2\alpha}, \\ \frac{1 + \sqrt{1 - 8\alpha}}{2\alpha} < k < \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha}}{2\alpha} \end{aligned} \quad (9)$$

в соответствии с количеством точек пересечения параболы $\omega = \alpha k^2$ с прямой $\omega = k$ ($k = 0$, $k = 1/\alpha$), в которых значение инкремента $\mathrm{Im}\,\omega = 1$. На рис. 2, 3 изображены дисперсионные кривые (сплошные линии на рис. 2, *а*, 3, *а*) и инкременты неустойчивости при $\theta = -1$ для случаев $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.1$ соответственно. В области волновых чисел k, где имеется неустойчивость, решения (6) комплексно сопряженные. Положительная мнимая часть представляет собой инкремент неустойчивости, зависимость которого от k показана на рис. 2, *б*, 3, *б*. Вещественная часть частоты в области неустойчивости изображена штрихованной кривой на рис. 2, *а*, 3, *а*. Пунктирные кривые те же, что и на рис. 1.

Определим теперь характер неустойчивости системы, описываемой дисперсионным уравнением (5) с $\theta = -1$. Точки ветвления функций $k = k(\omega)$ — решений дисперсионного уравнения (5) — определяются системой [1–4]

$$D(\omega, k) = 0, \quad \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial k} = 0. \quad (10)$$

Используя дисперсионное уравнение (5), из (10) можно получить уравнение пятой степени относительно ω для определения точек ветвления

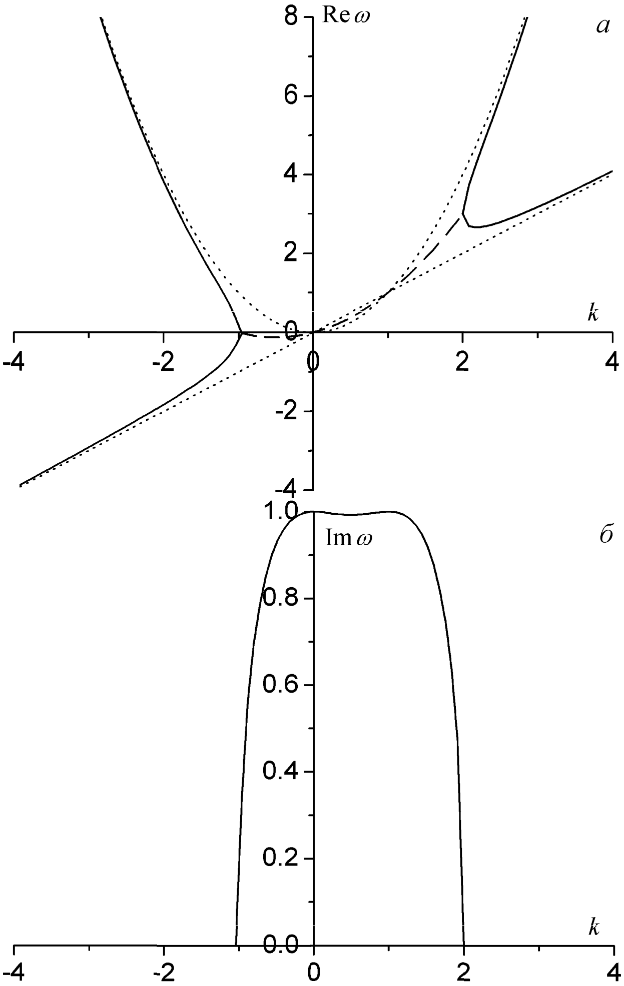

Рис. 2. Дисперсионные кривые (*а*) и инкремент неустойчивости (*б*) при $\theta = -1$, $\alpha = 1$. Пунктирная кривая — $\mathrm{Re}\,\omega$ в области неустойчивости. Штрихованная кривая — те же волны в отсутствие связи

$\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Это уравнение в случае $\alpha > 1/8$ имеет один вещественный и четыре комплексных корня, в случае $\alpha < 1/8$ — три вещественных и два комплексных корня. Вещественные точки ветвления функций $k = k(\omega)$ на рис. 2, *а*, 3, *а* соответствуют значениям ω, в которых два значения k сливаются в одно. Таким образом, в зависимости от величины α имеем либо одну, либо две точки ветвления с положительной мнимой частью $\omega_2 > 0$.

Дисперсионное уравнение (5) для заданного значения ω определяет три волны с различными k. Устремляя мнимую часть частоты $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ при фиксированной вещественной части $\mathrm{Re}\,\omega$, можно получить асимптотическое поведение корней:

$$k(\omega) \approx i\,\mathrm{Im}\,\omega, \quad k(\omega) \approx \pm(1+i)\sqrt{\mathrm{Im}\,\omega/2\alpha}. \qquad (11)$$

Два из них соответствуют волнам, затухающим в положительном направлении оси x, один — в отрицательном. Предельный переход $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ означает мгновенное включение источника возмущений с частотой $\mathrm{Re}\,\omega$ в некоторой точке пространства с координатой x. А значит, распространяющимися в данном направлении с частотой $\mathrm{Re}\,\omega$ следует считать волны, затухающие в данном направлении при

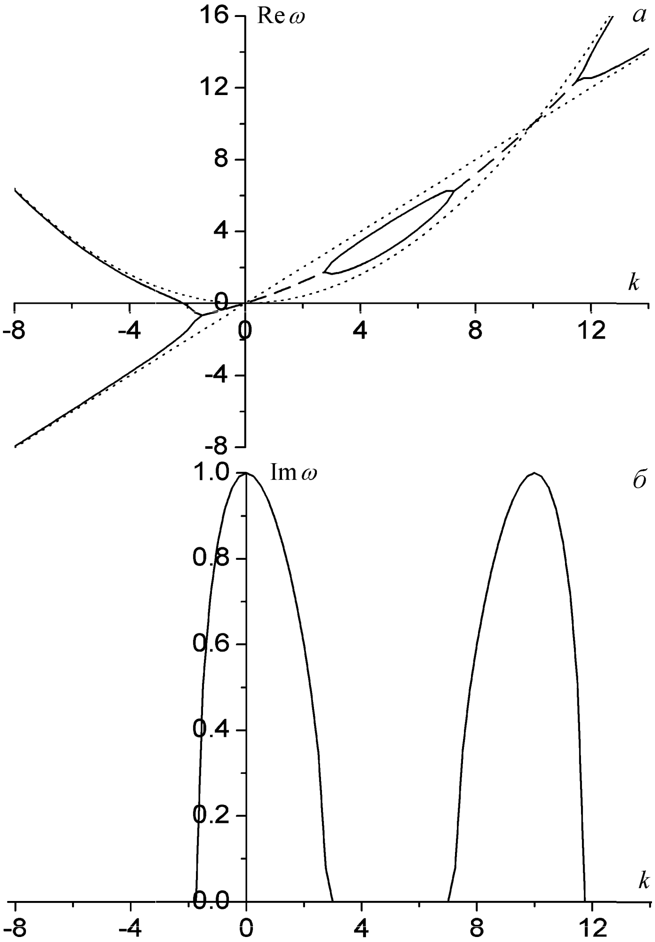

Рис. 3. Дисперсионные кривые (*а*) и инкремент неустойчивости (*б*) при $\theta = -1$, $\alpha = 0.1$. Пунктирная кривая — $\mathrm{Re}\,\omega$ в области неустойчивости. Штрихованная кривая — те же волны в отсутствие связи

стремлении $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ [1–4]. Такая классификация волн по направлению распространения соответствует принципу причинности. Характер неустойчивости системы определяется поведением корней $k(\omega)$ вблизи точек ветвления с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$. А именно, если имеется хотя бы одна точка ветвления с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, в которой ветвятся корни $k(\omega)$, соответствующие волнам с различными направлениями распространения (мнимые части $\mathrm{Im}\,k$ имеют разные знаки при $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$), то система абсолютно неустойчива. Причем асимптотическое поведение возмущений при $t \to \infty$ определяется точкой ветвления волн $k(\omega)$ с различным направлением распространения и максимальной мнимой частью, т. е. $\sim \exp(\omega_2 t - i\omega_1 t)$. Во всех других случаях неустойчивая система конвективно неустойчива [1–4].

На рис. 4 представлено поведение корней $k(\omega)$ на комплексной плоскости для случая $\alpha = 1$ при изменении частоты вдоль контура $\mathrm{Re}\,\omega = \omega_1$, $+\infty > \mathrm{Im}\,\omega > \omega_2$. Три набора точек с разными маркировками соответствуют трем различным ветвям $k(\omega)$. Уменьшая мнимую часть частоты $\mathrm{Im}\,\omega$ от достаточно большого значения до ω_2, при фиксированной вещественной части ω_1 получим эти три набора точек $k(\omega)$, два из которых стремятся к одному

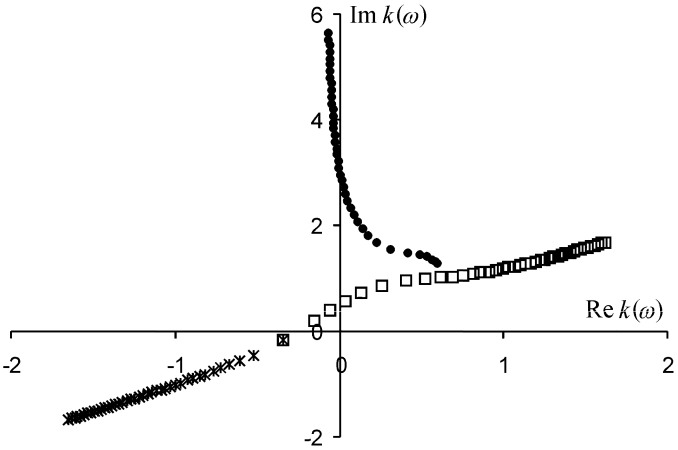

Рис. 4. Поведение корней $k(\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частоты ω от $\omega_1 + i\infty$ до $\omega_1 + i\omega_2$

пределу (точка $k = -0.34 - 0.16i$ на рис. 4). Так как в данной точке ветвления сходятся корни $k(\omega)$, соответствующие волнам с различным направлением распространения, то мы имеем случай абсолютной неустойчивости [1–4]. Повторяя аналогичные вычисления при других значениях $\alpha > 0$ для всех точек ветвления функций $k(\omega)$ с положительной мнимой частью $\omega_2 > 0$, можно убедиться, что неустойчивость остается абсолютной.

Случай $\alpha < 0$ не требует специального рассмотрения, так как заменой $\alpha \to -\alpha$, $k \to -k$, $\omega \to -\omega$ уравнение (5) сводится к уже рассмотренному, с положительным коэффициентом перед k^2. Таким образом, рис. 1, 2, *а*, 3, *а* следует просто отразить относительно начала координат, а рис. 2, *б*, 3*б* — относительно оси ординат. Изменится, однако, процедура определения характера неустойчивости. В новых переменных $\mathrm{Im}\,\omega$ следует изменять от $-\infty$ до $-\omega_2 < 0$. Но так как дисперсионное уравнение (5) имеет вещественные коэффициенты, то изменение знака $\mathrm{Im}\,\omega$ приведет лишь к изменению всех знаков $\mathrm{Im}\,k(\omega)$, а значит, характер неустойчивости не изменится. Асимптотически при $t \to \infty$ в фиксированной точке пространства возмущения будут нарастать с тем же инкрементом ω_2 и противоположным значением частоты ω_1.

На рис. 5 представлены зависимости инкремента ω_2 (сплошная кривая) и частоты ω_1 (штрихованная кривая) асимптотического поведения при $t \to \infty$ возмущений $\sim \exp(\omega_2 t - i\omega_1 t)$ как функции параметра α. Как уже указывалось, система, описываемая дисперсионным уравнением (5), всегда абсолютно неустойчива. Изменение знака α приводит к изменению знака ω_1, скорость нарастания возмущений

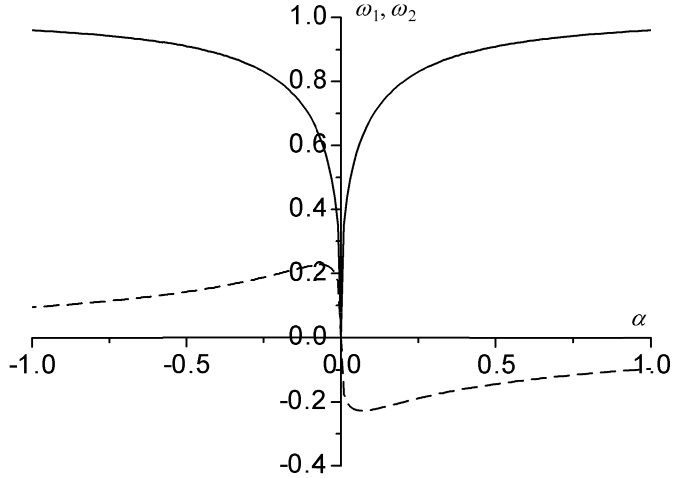

Рис. 5. Зависимость вещественной ω_1 (пунктирная кривая) и мнимой ω_2 (сплошная кривая) частей частоты развития абсолютной неустойчивости от α

в фиксированной точке при $t \to \infty$ остается неизменной. При α не близких к нулю ω_2 порядка величины инкремента неустойчивости монохроматической волны, при $\alpha \to 0$ для адекватного анализа требуется учет следующего члена разложения ($\sim k^3$) в первом множителе левой части уравнения (5).

Авторы благодарны А. А. Рухадзе за внимание к работе и полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект УР.01.02.493), Минпромнауки (проект ведущие научные школы НШ-1962.2003.2) и РФФИ (проект 04-02-17240).

Литература

1. *Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М., 1981.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. М., 2001.
3. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В.* и др. Электродинамика плазмы. М., 1974.
4. *Александров А.Ф., Рухадзе А.А.* Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. Неравновесные среды. М., 2002.
5. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С.* Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М., 2002.
6. *Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* // Физика плазмы. 2004. **30**, №1. С. 60.
7. *Кузнецов А.П.* // Письма в ЖТФ. 1982. **8**, №15. С. 941.

Поступила в редакцию
24.03.04