

УДК 539.12.01

ДВУХЧАСТОТНЫЙ ОНДУЛЯТОР И ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОНОМ

К. В. Жуковский, В. В. Михайлин

(кафедра оптики и спектроскопии)

E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

Проведено исследование и анализ спектра излучения релятивистского электрона в магнитном поле двухчастотного ондулятора, осциллирующего в двух ортогональных плоскостях. Обсуждаются особенности спектра излучения в ондуляторе с кратным целому числу отношением периодов ондулятора.

Введение

Ондуляторное излучение в магнитных полях различных конфигураций широко обсуждалось в литературе [1–7]. Ученые Московского государственного университета участвовали в разработке теории ондуляторного излучения [2, 6, 8] и в экспериментах по исследованию спектрального и углового распределения его интенсивности [9–13]. В последнее время особенный интерес вызывает исследование ондуляторов с нетрадиционными конфигурациями полей, как, например, двухчастотный ондулятор, который сочетает высокую энергетическую эффективность с узким спектром излучения [14, 15]. В подобных ондуляторных схемах, напоминающих известный геликоидальный ондулятор, электрон движется вдоль оси, пересекая магнитное поле, осциллирующее вдоль той же оси с кратными пространственными периодами. Например, недавно такой ондулятор с трехкратным отношением частот был изучен с применением обобщенных функций Бесселя.

В настоящей работе рассматривается обобщенная модель ондулятора с магнитным полем, заданным следующим образом:

$$\mathbf{H} = \left(0, H_y \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right), H_z \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_2}\right) \right), \quad (1)$$

которая является обобщением геликоидального ондулятора. Действительно, при условии что периоды ондулятора одинаковы $\lambda_1 = \lambda_2$ и магнитное поле имеет равные компоненты $H_y = H_z$, электрон движется по геликоидальной орбите, и тогда в приближении большой длины всего ондулятора излучение является аксиально симметричным и его спектр вдоль оси представлен единственной основной гармоникой.

Яркость двухчастотного ондулятора

Рассмотрим наиболее общий случай, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $H_y \neq H_z$. Электроны движутся в магнитном поле ондулятора с N периодами длины λ_1 вдоль оси x и радиус-вектор из точки наблюдения задан следующим образом:

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi). \quad (2)$$

Ограничимся случаем ультрарелятивистских электронов, когда выполняются условия

$$\gamma \gg 1, \quad \beta_{\perp} \ll 1, \quad \beta_{\perp} H_{\parallel} \ll H_{\perp}. \quad (3)$$

Интегрирование уравнений движения под действием силы Лоренца приводит к следующим выражениям для скорости:

$$\beta_x \approx \beta_x^0 + \frac{1}{4\gamma^2} (k_1^2 \cos(2\omega_1 t) - k_2^2 \cos(2\omega_2 t)), \quad (4)$$

где постоянная компонента скорости β_x^0 представлена следующим образом:

$$\beta_x^0 = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \right) \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\pi}{\lambda_1} \beta_x^0 c, & \omega_2 &= \frac{2\pi}{\lambda_2} \beta_x^0 c, \\ k_1 &= \frac{e H_y \lambda_1}{m c^2 2\pi}, & k_2 &= \frac{e H_z \lambda_2}{m c^2 2\pi}, & k_1 &\neq k_2, \end{aligned} \quad (6)$$

а e и m — соответственно заряд и масса электрона. Поперечные компоненты скорости при этом записываются таким образом:

$$\begin{aligned} \beta_y(t) &= \frac{k_2}{\gamma} \cos(\omega_2 t) - \left(\frac{k_2}{\gamma}\right)^3 \frac{1}{16} \times \\ &\left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 [\cos((2\omega_1 - \omega_2)t) - \cos((2\omega_1 + \omega_2)t)] - \right. \\ &\left. - \cos(\omega_2 t) + \cos(3\omega_2 t) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \beta_z(t) &= \frac{k_1}{\gamma} \sin(\omega_1 t) + \left(\frac{k_1}{\gamma}\right)^3 \frac{1}{16} \times \\ &\left\{ -\frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 [\sin((\omega_1 + 2\omega_2)t) - \sin((\omega_1 - \omega_2)t)] + \right. \\ &\left. + \sin(\omega_1 t) + \sin(3\omega_1 t) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Электрон движется в заданном выше магнитном поле по следующей траектории:

$$x(t) = c\beta_x^0 t + \frac{c}{8\gamma^2} \left(\frac{k_1^2}{\omega_1} \sin(2\omega_1 t) - \frac{k_2^2}{\omega_2} \sin(2\omega_2 t) \right), \quad (9)$$

$$y(t) = \frac{k_2 c}{\gamma \omega_2} \sin(\omega_2 t) + O((k_2/\gamma)^3), \quad (10)$$

$$z(t) = -\frac{k_1 c}{\gamma \omega_1} \cos(\omega_1 t) + O((k_1/\gamma)^3). \quad (11)$$

Полученные формулы описывают движение электрона с точностью до третьего порядка по параметру k/γ . Как известно, релятивистская частица излучает в узкий конус с углом раствора порядка $1/\gamma$. Используя этот факт, а именно что

$$k/\gamma \sim \theta, \quad k/\gamma \ll 1, \quad (12)$$

запишем координаты единичного вектора (2) в следующем виде:

$$\mathbf{n} = (1 - \theta^2/2, \theta \cos \phi, \theta \sin \phi). \quad (13)$$

Представляющее интерес излучение ондулятора в дальней зоне [16] описывается известной формулой для интеграла излучения [17]:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \omega \int_{-\infty}^{\infty} dt [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \beta]] \exp[i\omega(t - \mathbf{nr}/c)] \right|^2. \quad (14)$$

Двойное векторное произведение $[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \beta]]$ представляет собой функцию углов θ и ϕ и приближенно вычисляется с точностью до $(k/\gamma)^3$. Осциллирующая экспонента в формуле (14) разлагается в ряд по (k/γ) . Результат такого разложения с точностью до третьего порядка удобно представить с помощью обобщенных и присоединенных функций Бесселя $J_l^{(m)}(u, v)$, зависящих от двух (а возможно, и более) аргументов [18–23]. В данной задаче мы используем присоединенные функции Бесселя $J_k^{(m,p)}(x, y; u, v)$, являющиеся решением расширенного уравнения для функций Бесселя [1, 24] и определенные, например, посредством следующей производящей функции:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k^{(m,p)}(x, y; u, v) = \\ & = \exp \left\{ \frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{y}{2} \left(t^m - \frac{1}{t^m} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{u}{2} \left(t^p - \frac{1}{t^p} \right) + \frac{v}{2} \left(t^{mp} - \frac{1}{t^{mp}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Интегральное представление присоединенных функций Бесселя, записанное ниже

$$\begin{aligned} & J_k^{(m,p)}(x, y; u, v) = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos[n\theta - x \sin \theta - u \sin(p\theta) - v \sin(pm\theta)], \end{aligned} \quad (16)$$

позволяет выразить последние в виде ряда произведений обобщенных функций Бесселя двух переменных:

$$J_k^{(m,p)}(x, y; u, v) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-pl}^{(m)}(x, y) J_l^{(m)}(u, v). \quad (17)$$

Воспользуемся следующим разложением экспоненты в ряд по присоединенным функциям Бесселя с использованием их производящей функции:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} J_n^{(m,p)}(x, y, z, \rho) = \\ & = \exp\{i[x \sin \alpha + y \sin m\alpha + z \sin p\alpha + \rho \sin pm\alpha]\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Theta} i^n J_n^{(m,p)}(x, -y, -z, -\rho) = \\ & = \exp\{i[x \cos \Theta + y \sin m\Theta + z \sin p\Theta + \rho \sin pm\Theta]\}, \end{aligned} \quad (19)$$

а также свойством симметрии присоединенных функций Бесселя, как, например:

$$J_n^{(m,p)}(x, y, z, \rho) = (-1)^n J_{-n}^{(m,p)}(-x, -y, -z, -\rho). \quad (20)$$

Будем считать, что отношение частот ондулятора определяется целым фактором p :

$$\omega_2 = p\omega_1 \quad \text{или} \quad \lambda_2 = \lambda_1/p. \quad (21)$$

Тогда, используя развитый выше формализм, осциллирующая часть в радиационном интеграле [22] может быть разложена в ряд по присоединенным функциям Бесселя четырех переменных:

$$\begin{aligned} \exp[i\omega(t - \mathbf{nr}/c)] & = \exp \left[i \frac{\omega t}{2\gamma^2} \left(\theta^2 \gamma^2 + 1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \right) \right] \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\omega_1 t} J_n^{(2,p)}(\eta, \zeta, Z, -\xi). \end{aligned} \quad (22)$$

Как и лазерное, ондуляторное излучение представляет интерес прежде всего на оси прибора, где оно имеет резкий пик интенсивности. Полагая $\theta = 0$, получим выражение для яркости ондулятора на оси:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \Big|_{\theta=0} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega (i)^n H_n(\omega) \Big|_{\theta=0} \mathbf{T}_n(\omega) \Big|_{\theta=0} \right|^2, \quad (23)$$

где

$$H_n(\omega) \Big|_{\theta=0} = \int_0^{\tilde{T}} dt \exp\{i\phi_n t\}, \quad (24)$$

$$\phi_n = \frac{\omega}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \right) - n\omega_1, \quad (25)$$

$$\tilde{T} = \lambda_1 N / \beta_x c = 2\pi N / \omega_1,$$

определяемое для гармоник единственным числом n . Резонансные частоты ондулятора, соответствующие максимумам спектральной интенсивности и соответственно нулям фазы в экспоненте (24), записываются через число гармоник n следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_n & = n\phi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ \phi & = 2\omega_1 \gamma^2 / (1 + k^2), \quad k^2 = (k_1^2 + k_2^2) / 2, \end{aligned} \quad (26)$$

$$H_n(\omega_n) = \sin(\tilde{T}\phi_n/2)/(\phi_n/2) \propto \tilde{T} = 2\pi N/\omega_1. \quad (27)$$

Выражение для вектора \mathbf{T} , входящего в интеграл излучения (23), в общем случае зависит от четырех переменных и имеет сложный вид. Однако в интересующей нас области, т. е. на оси ондулятора, x -компонента T_x и два из четырех аргументов функций Бесселя обращаются в нуль. Это упрощает конечное выражение для \mathbf{T} , записываемое через обобщенные функции Бесселя следующим образом:

$$\mathbf{T}|_{\theta=0} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -k_2 \left(J_{(n+p)/2}^{(p)}(-\zeta, \xi) + J_{(n-p)/2}^{(p)}(-\zeta, \xi) \right) \\ ik_1 \left(J_{(n+1)/2}^{(p)}(-\zeta, \xi) - J_{(n-1)/2}^{(p)}(-\zeta, \xi) \right) \end{array} \right\}, \quad (28)$$

$$\zeta(\omega) = \frac{\omega}{8\omega_1} \left(\frac{k_1}{\gamma} \right)^2, \quad \xi(\omega) = \frac{\omega}{8\omega_2} \left(\frac{k_2}{\gamma} \right)^2, \quad \omega_2 = p\omega_1, \quad (29)$$

где n — номер излучаемой гармоники и p — гармоническое число ондулятора. Это выражение при подстановке в формулу (23) совместно с (27) определяет интенсивность излучения ондулятора на его оси на резонансных частотах, задаваемых выражением (26):

$$E(\omega) = \frac{e^2 N^2 \gamma^2}{c} \frac{1}{(1 + (k_1^2 + k_2^2)/2)^2} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n \frac{\sin(\tilde{T}\phi_n/2)}{\tilde{T}\phi_n/2} \right)^2 \left(|T_{n,y}|_{\theta=0}|^2 + |T_{n,z}|_{\theta=0}|^2 \right). \quad (30)$$

Излучение рассмотренного выше двухчастотного ондулятора в предельном случае, когда электрон движется по чисто геликоидальной орбите, имеет гораздо более простой характер. Действительно, в случае $\omega_2 = \omega_1$, $k_2 = k_1 = k$, применяя теорему Неймана для функций Бесселя, мы переходим от обобщенных к обычным функциям Бесселя. Более того, все члены ряда, определяющего интенсивность излучения в (30), обращаются в нуль, за исключением первого, что приводит к известному выражению для излучения на оси геликоидального ондулятора на резонансных частотах, содержащего одну-единственную гармонику:

$$E_{\text{hel}}(\omega) = \frac{e^2 N^2 \gamma^2}{c} \frac{k^2}{(1 + k^2)^2} 2 \left(\frac{\sin(\tilde{T}\phi_1/2)}{\tilde{T}\phi_1/2} \right)^2. \quad (31)$$

В завершение рассмотрим излучение ондулятора с несколько отличной конфигурацией поля в ондуляторе, а именно

$$\mathbf{H} = \left(0, H_y \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right), H_z \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_2}\right) \right). \quad (32)$$

Используем описанную выше технику присоединенных функций Бесселя. Воспользовавшись вышеизложенным методом, получаем следующее выражение

для вектора \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}|_{\theta=0} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -k_2 \left(J_{(n+p)/2}^{(p)}(-\zeta, -\xi) + J_{(n-p)/2}^{(p)}(-\zeta, -\xi) \right) \\ k_1 \left(J_{(n+1)/2}^{(p)}(-\zeta, -\xi) + J_{(n-1)/2}^{(p)}(-\zeta, -\xi) \right) \end{array} \right\}, \quad (33)$$

которое при подстановке в формулу (30) определяет интенсивность излучения гармоник ондулятором на его оси.

Легко убедиться в том, что выключая магнитное поле вдоль оси y и оставляя его компоненту по оси z неизменной, оба выражения (28) и (33) приводят после разложения обобщенных функций Бесселя в ряд по обычным функциям Бесселя к одному и тому же результату, а именно

$$E(\omega) = \frac{e^2 N^2 \gamma^2}{c} [k_2/(1 + (k_1^2 + k_2^2)/2)]^2 \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n \frac{\sin(\tilde{T}\phi_n/2)}{\tilde{T}\phi_n/2} (J_{(n+p)/2p}(\xi) + J_{(n-p)/2p}(\xi)) \right)^2. \quad (34)$$

Обсуждение результатов

Полученные результаты показывают, что излучение двухчастотного ондулятора поляризовано в плоскости, перпендикулярной оси ондулятора. Наличие гармоник в спектре излучения можно проследить по индексам функций Бесселя, соответственно $(n \pm p)/2$ для Y -компоненты и $(n \pm 1)/2$ для Z -компоненты, где n — номер излучаемой гармоники и p — гармоническое число ондулятора. Например, если гармоническое число ондулятора четное, то четные гармоники имеют только Y -компоненту, а нечетные гармоники имеют только Z -компоненту. Для ондулятора с нечетным гармоническим числом $p = 3, 5, 7, \dots$, четные гармоники будут полностью подавлены, в то время как нечетные гармоники будут иметь обе компоненты Z и Y .

Спектр излучения двухчастотного ондулятора со значениями гармонического числа $p = 1, 2, 3$ и 4 представлен на рис. 1, который изображает Y - (черные) и Z - (белые) компоненты интенсивности излучения ондулятора со значением параметров ондулятора $k_2 = k_1 = 1$. В известном случае ондулятора с одинаковыми частотами $\omega_2 = \omega_1$ излучение происходит на одной-единственной частоте (рис. 1, а). Рисунки 1, б–г демонстрируют, как наиболее интенсивно излучается гармоника с номером $n = p$ и частотой $\omega = p\omega_1$, в то время как младшие гармоники с $n < p$ оказываются сильно подавленными. Чем дальше друг от друга отстоят частоты ондулятора ω_2 и ω_1 , тем сильнее подавлены младшие гармоники. Такой же эффект имеет ослабление поля и, следовательно, уменьшение параметров k_i ондулятора. Увеличение гармонического числа ондулятора p усиливает излучение высших гармоник. К тому же приводит увеличение параметров k_i . Конечно, эти рассуждения верны, пока значение параметров k_i не превосходит

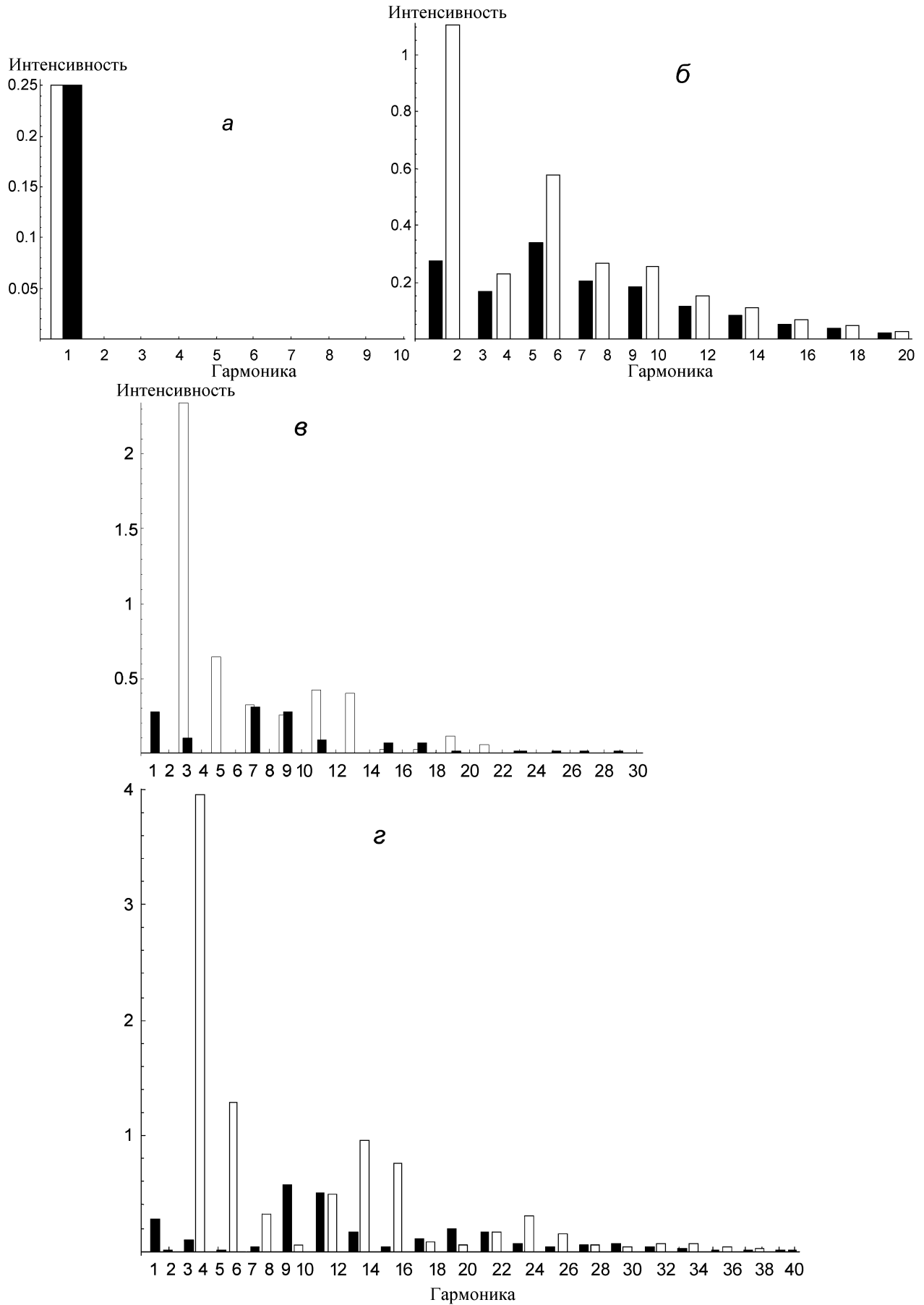


Рис. 1. Y- (белые) и Z- (черные) компоненты яркости гармоник номера n в двухчастотном ондуляторе с $k_1 = k_2 = 1$ и гармоническим числом ондулятора $p = 1$ (а), $p = 2$ (б), $p = 3$ (в) и $p = 4$ (г)

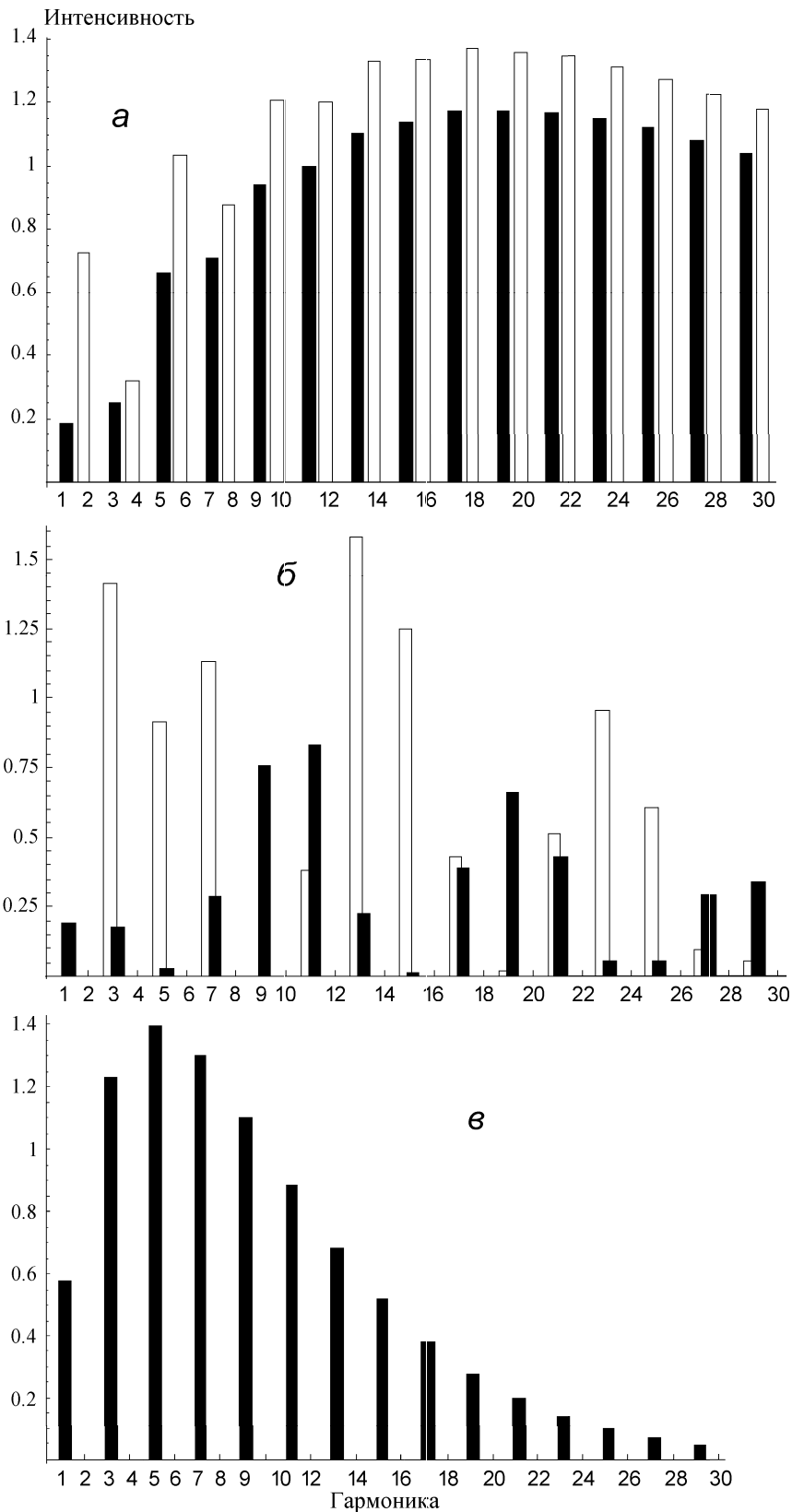


Рис. 2. Y- (белые) и Z- (черные) компоненты яркости гармоник номера n в двухчастотном ондуляторе с $k_1 = k_2 = 2$: (а) $\omega_2 = 2\omega_1$, (б) $\omega_2 = 3\omega_1$; (в) спектр излучения в случае выключения магнитного поля вдоль оси Z: $k_1 = 0$ и $k_2 = 2$

значительно единицу и, следовательно, качественно сохраняется типичная форма спектра ондулятора.

С ростом интенсивности поля и значений $k_i > 1$ излучение на высших гармониках становится преобладающим, и спектр такого ондулятора становится настолько широким, что подобный режим излучения теряет практический смысл. Рисунки 2, а, б демонстрируют такую ситуацию, когда основная гармоника подавлена при $k_i = 2$. Дальнейшее увеличение параметров ондулятора k_i увеличивает яркость ондулятора исключительно за счет высших гармоник. В случае когда гармоническое число ондулятора $p > 2$ и $k_2 \sim k_1$, спектр приобретает сложную форму с характерной последовательностью максимумов и минимумов (рис. 1, в, г и 2, б). Выключение магнитного поля по одной из осей (рис. 2, в) возвращает

спектру известную уширенную форму в сверхсильном поле.

Представление о вкладе различных поляризаций в интенсивность излучения двухчастотного ондулятора дает рис. 3. Например, вклады Z- и Y-компонент излучения основной гармоники с $n = p = 3$ как функции ондуляторных параметров k_i в ондуляторе с отношением частот $p = 3$ приведены на рис. 3, а, б. Рост интенсивности поля ($k_i < 1$) способствует усилению излучения основной гармоники.

В случае когда частоты ондулятора равны, но параметры ондулятора k_i различны, излучение происходит не только на основной, но и на высших нечетных гармониках. Например, излучения пятой гармоники в ондуляторе с отношением частот $p = 3$ продемонстрировано на рис. 3, в, г. При $k_1 > k_2$ ин-

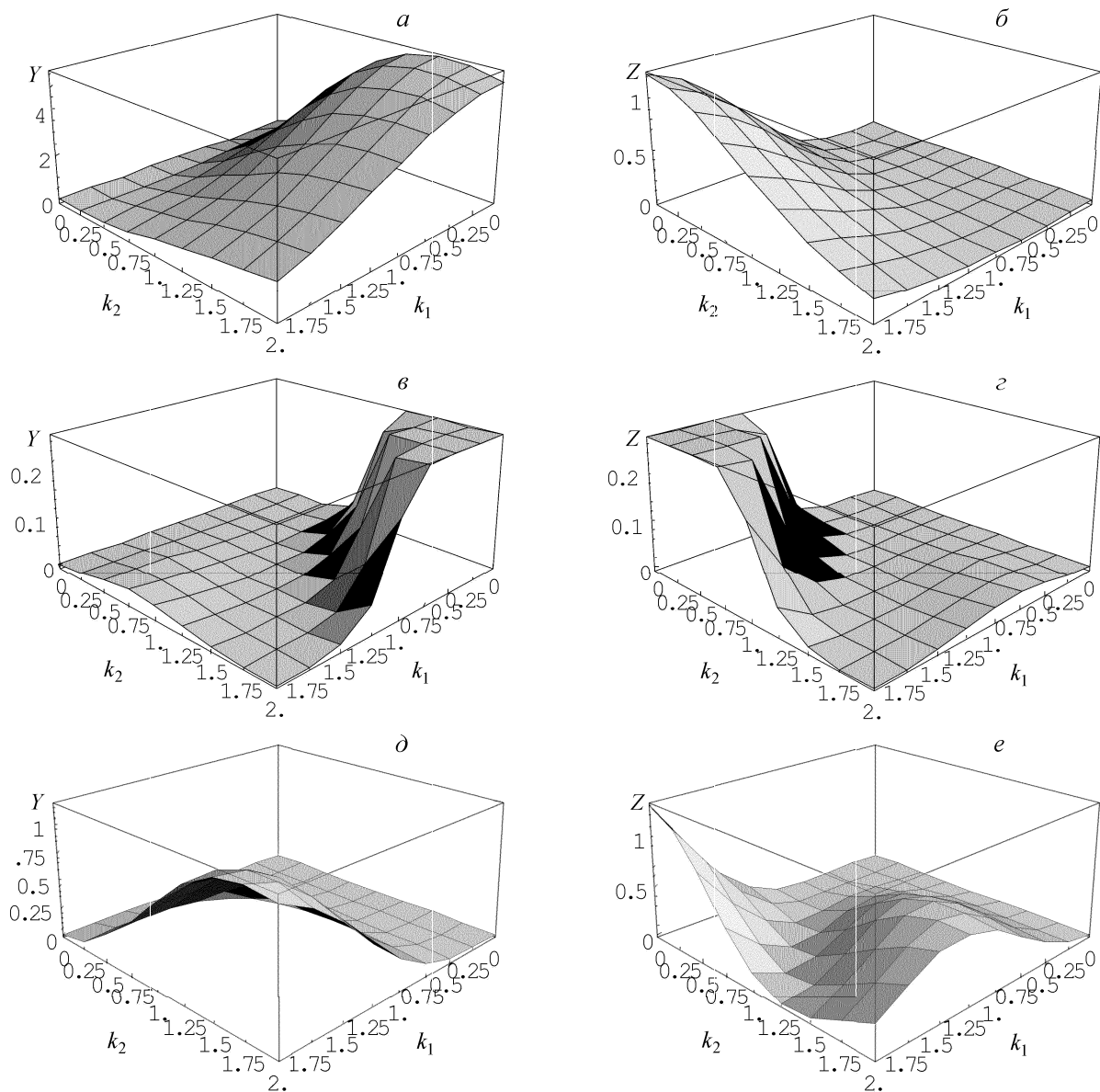


Рис. 3. Y- и Z-компоненты излучения для полевых параметров k_i : (а) и (б) — для гармоник номера $n = 3$ в двухчастотном ондуляторе с гармоническим номером $p = 3$; (в) и (г) — для гармоник номера $n = 5$ в ондуляторе с равными частотами с гармоническим номером $p = 1$; (д) и (е) — для гармоник номера $n = 7$ в двухчастотном ондуляторе с гармоническим номером $p = 3$

тенсивность излучения пятой гармоники стремится к нулю, что соответствует прямой $k_1 = k_2$ долины минимума поверхности, изображенной на рис. 3, в, г. Излучение высших гармоник в зависимости от ондуляторных параметров k_i может иметь сложный характер с несколькими локальными максимумами сравнимой интенсивности. Характерно, что в ондуляторе с отличными друг от друга частотами $\omega_1 \neq \omega_2$ минимум излучения высших гармоник смещается с прямой $k_1 = k_2$, как показывает рис. 3, д, е. В таком случае его можно найти численно.

Литература

1. Тернов И.М., Михайлин В.В., Халилов В.Р. Синхротронное излучение и его применения. М., 1980.
2. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М., 1983.
3. Dattoli G., Gianessi L., Ottaviani P.L. et al. // Nucl. Instr. Meth. 2002. **A495**. P. 48.
4. Handbook of Synchrotron Radiation / E.E. Koch (Ed.). Amsterdam, 1983.
5. Dattoli G., Gianessi L., Voukov G. // Comp. Math. Appl. 1994. **27**, N 6. P. 63.
6. Соколов А.А., Гальцов Д.В., Жуковский В.Ч. // ЖТФ. 1973. **43**. С. 682.
7. Kim K.-J. // Nucl. Instr. Meth. 1986. **A246**. P. 67.
8. Багров В.Г., Соколов А.А., Тернов И.М., Халилов В.Р. // Изв. вузов. Физика. 1973. № 10. С. 50.
9. Alferov D.F., Bashmakov Yu.A., Belovintsev K.A. et al. // Preprint FIAN. 1973. P. 1.
10. Алферов Д.Ф., Башмаков Ю.А., Беловинцев К.А. и др. // Тр. III Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. М., 1973. С. 39.
11. Алферов Д.Ф., Беловинцев К.А., Келдыш Л.В. и др. // Тр. ФИАН. **80**. М., 1975. С. 125.
12. Лифшиц А.М., Михайлин В.В., Черенков П.А. // Письма в ЖТФ. 1978. **4**, № 11. С. 625.
13. Алферов Д.Ф., Башмаков Ю.А., Михайлин В.В. и др. // Препринт ФИАН. № 111. М., 1980.
14. Laser Handbook / W.B. Colson, C. Pellegrini, A. Renieri (Eds.). Vol. VI. Amsterdam, 1993.
15. Iracane D., Vamas P. // Phys. Rev. Lett. 1991. **67**. P. 3086.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Классическая теория поля. М., 1975.
17. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. New York, 1975.
18. Dattoli G., Renieri A., Torre A. Lectures on the Free Electron Laser Theory and Related Topics. Singapore, 1993.
19. Reiss H.R. // Phys. Rev. 1980. **A22**. P. 1786.
20. Нукишов А.И., Румус В.И. // ЖЭТФ. 1964. **46**. P. 776.
21. Brown L.S., Kibble T.W.B. // Phys. Rev. 1964. **133**. P. 704.
22. Dattoli G., Gianessi L., Mezzi L., Torre A. // Nuovo Cimento. 1990. **105B**. P. 327.
23. Dattoli G., Torre A., Lorenzutta S. et al. // Nuovo Cimento. 1991. **106B**. P. 21.
24. Dattoli G., Lorenzutta S., Maino G. et al. // J. Math. Phys. 1994. **35**, N 7. P. 2626.

Поступила в редакцию
31.01.05