ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 567.145

ОБ ЭЛЕКТРОНАХ, ФОРМИРУЮЩИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ТОК

Н. Б. Брандт, Г. А. Миронова, В. В. Ржевский
(*кафедра физики низких температур и сверхпроводимости*)
E-mail: rzhevski@mig.phys.msu.su

Рассмотрены соотношения между плотностью элементарных возбуждений и общим числом электронов в различных температурных интервалах для нормального и сверхпроводящего состояний лондоновских сверхпроводников. Показано, что принципиально различные модели проводимости Друде–Лоренца и Лифшица можно объединить, если ввести эффективную плотность сверхпроводящих электронов.

Вопрос о том, что такое сверхпроводящие электроны, затрагивает ключевые положения физики сверхпроводимости: с одной стороны, он имеет принципиальное значение, так как в теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау на число сверхпроводящих электронов n_s нормируется волновая функция, с другой — он важен для прикладных аспектов сверхпроводимости, так как величина n_s входит во все уравнения электродинамики сверхпроводников. Интерес к фермионам, формирующим сверхпроводящий ток, увеличился в последнее время, о чем свидетельствует появление ряда публикаций [1, 2].

В настоящей работе предпринята попытка рассмотреть соотношения между концентрациями элементарных возбуждений и общего числа электронов в различных температурных интервалах для нормального и сверхпроводящего состояний лондоновских сверхпроводников на основе простых и наиболее наглядных моделей. Отметим, что модельные представления являются лишь иллюстрацией сложной квантовомеханической картины сверхпроводящего тока. Поэтому условное деление электронов на сверхпроводящие и нормальные скорее служит целям наглядных качественных представлений, чем достижению строгих результатов. Вместе с тем, как мы покажем, выбор правильной модели позволяет получить физически обоснованные, наглядные результаты, которые согласуются со строгими квантовомеханическими расчетами.

Сверхпроводящий ток I_s в массивных сверхпроводниках течет в тонком поверхностном слое толщиной λ, называемом глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Объемная плотность j_s поверхностного тока уменьшается (почти экспоненциально) при удалении от поверхности. Удобно заменить экспоненциальное затухание тока ступенчатым:

$$I_S = \int_0^\infty j_x\, dx = j_{s0}\lambda, \tag{1}$$

где x — координата нормальная к поверхности. Такая замена позволяет считать, что на поверхности течет сверхпроводящий ток с постоянной объемной плотностью j_{s0} на глубине λ. Существенно различаются два случая: $\lambda \gg \xi_0$ и $\lambda \ll \xi_0$, где ξ_0 — длина когерентности при $T = 0$, определяющая в теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) размер куперовских пар. В первом случае сверхпроводники описываются локальной электродинамикой Лондонов, в которой сверхпроводящий ток $j_s(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ определяется значением векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в этой точке. Во втором случае — нелокальной электродинамикой Пиппарда, в которой предполагается, что на куперовскую пару действует некоторый усредненный по объему $\sim \xi_0^3$ векторный потенциал.

Для большей наглядности будем рассматривать только сверхпроводники, описываемые локальной электродинамикой с $\lambda \gg \xi_0$. В этом случае для описания тока в сверхпроводниках можно использовать те же самые выражения для плотности тока, которые используются для нормальных металлов. В нормальных металлах электрический ток создается всеми электронами в незаполненных энергетических зонах. В сверхпроводниках, во-первых, электроны, ограниченные небольшими листами изоэнергетических поверхностей, могут вообще не переходить в сверхпроводящее состояние. Во-вторых, энергетические сверхпроводящие щели 2Δ в спектре электронов в различных зонах могут существенно различаться. Последнее означает, что при понижении температуры ниже критической, $T < T_c$, в сверхпроводимость будут последовательно, при соответствующих температурах, включаться электроны из областей импульсного пространства, ограниченных листами изоэнергетических поверхностей с меньшими значениями щелей 2Δ [3]. В-третьих, при образовании энергетических щелей 2Δ в спектре электроны в каждой зоне условно можно разделить на три группы:

а) группу электронов, состояния которых не изменяются при переходе в сверхпроводящее состояние;

б) электроны образующие куперовские пары;

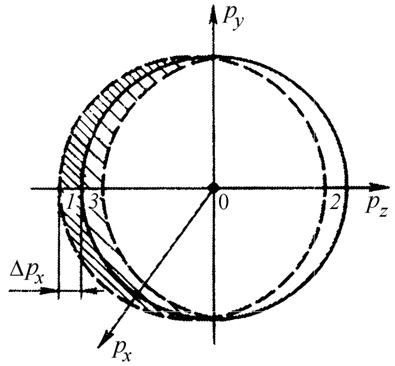
в) элементарные одночастичные возбуждения над поверхностью Ферми, возникающие при $T \neq 0$ в случае разрыва пар, а также термического возбуждения частиц через щель 2Δ.

В связи с этим следует прежде всего определить, что такое «сверхпроводящие электроны». Поскольку основным свойством сверхпроводников является отсутствие у них электрического сопротивления ($R = 0$), т. е. в сверхпроводниках может течь незатухающий электрический ток плотности j_s. Поэтому естественно определить «сверхпроводящие электроны» как электроны, плотность которых входит в выражение для сверхпроводящего тока и которые обеспечивают бездиссипативный перенос заряда и определяют его величину.

Вопрос о значении плотности сверхпроводящих электронов n_s в теории Лондонов не обсуждается, n_s вводится как феноменологический параметр, значение которого при $T = 0$ определяется с помощью предельного перехода к естественному верхнему пределу — плотности электронов проводимости. В теории БКШ число сверхпроводящих электронов определяется как число носителей зарядов, понижающих энергию. Вместе с тем исходное число пар является неопределенным.

Ограничимся, как в теории БКШ, рассмотрением простейшего случая одной изоэнергетической поверхности сферической формы. Токовому состоянию соответствует смещенная в пространстве импульсов поверхность Ферми. Для нормальных металлов смещение поверхности Ферми обеспечивается наличием электрического поля $\mathbf{E}$. После выключения электрического поля электронная система быстро релаксирует в результате рассеяния электронов на фононах и неоднородностях кристаллической решетки к равновесному, бестоковому распределению в пространстве импульсов, когда каждому электрону с импульсом $\mathbf{p}$ соответствует электрон с импульсом $-\mathbf{p}$. Величина смещения поверхности Ферми определяет величину плотности электрического тока. У нормальных металлов величина смещения принципиально не ограничена. У сверхпроводников величина смещения фермиевской поверхности ограничена значением критического тока j_{sc}, при котором сверхпроводимость разрушается.

Определим предельно возможную величину смещения поверхности Ферми у сверхпроводников в токовом состоянии при $T = 0$. В основном состоянии поверхность Ферми сверхпроводника размыта на величину $\Delta P \approx \frac{2\Delta_0 m}{p_F}$. При смещении поверхности Ферми на величину $\mathbf{\Delta P}$ у одного электрона в паре импульс увеличивается на $\mathbf{\Delta P}$ и становится равным $\mathbf{P}+\mathbf{\Delta P}$, а у другого — уменьшается на эту же величину: $\mathbf{P}-\mathbf{\Delta P}$ (рисунок). При $T = 0$ элементарных возбуждений нет и ситуация в сверхпроводниках при условии $\lambda \gg \xi_0$ отличается от ситуации в нормальных металлах только тем, что теперь поверхность Ферми размыта на величину $\Delta P \approx \frac{2\Delta_0 m}{p_F}$. Величина смещения $\mathbf{\Delta P}$ поверхности Ферми, так же как у нормальных металлов, однозначно определяет скорость



Сдвиг поверхности Ферми в токовом состоянии. При $\Delta p \ll p_F$ объемы *1* и *3* с точностью до величины 2-го порядка по Δp равны между собой, поэтому, согласно модели Лифшица, достаточно рассчитать ток, создаваемый в объеме *1*, а затем удвоить полученную величину

дрейфа всех электронов $\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{\Delta P}}{m}$ независимо от того, образуют они куперовские пары или нет. Наличие куперовских пар обеспечивает только бездиссипативность переноса тока. Поэтому можно считать, что при $T = 0$ в сверхпроводящем состоянии, как и в нормальном, ток создается всеми коллективизированными электронами, движущимися со скоростью $\mathbf{v}_d$. Обратим внимание, что поляризационный механизм обеспечивает притяжение пары электронов с противоположно направленными импульсами и в том случае, когда пара имеет импульс $\mathbf{\Delta P}$, т. е. один электрон в паре имеет импульс $\mathbf{p}+\mathbf{\Delta P}$, а второй $-\mathbf{p}+\mathbf{\Delta P}$ или, иначе, $-(\mathbf{P}-\mathbf{\Delta P})$. Иногда в литературе паре приписывается импульс $2\mathbf{\Delta P}$ [4]. В действительности $2\mathbf{\Delta P}$ — это импульс двух электронов в паре, с массами m. Если же рассматривать пары как связанные состояния, то центр масс пары имеет импульс $\mathbf{\Delta P}$, а ее приведенная масса $\mu = \frac{m}{2}$. При этом кинетическая энергия центра масс пары $\frac{\mathbf{\Delta P}^2}{2\mu}$ намного меньше величины разбаланса разности кинетической энергии электронов в паре:

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p}+\mathbf{\Delta P})^2 - \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-\mathbf{\Delta P})^2 \approx \frac{2\mathbf{p}\mathbf{\Delta P}}{m}. \quad (2)$$

А именно,

$$\frac{\mathbf{\Delta P}^2}{2\mu} \ll \frac{2\mathbf{p}\mathbf{\Delta P}}{m}. \quad (3)$$

Здесь $p \sim p_F$, а $\Delta P \ll p_F$. Разность кинетических энергий двух электронов (2) определяет величину термодинамической нестабильности движущейся пары. Разрыв пар становится энергетически выгодным только при значениях импульса ΔP, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2\mathbf{p}\mathbf{\Delta P}}{m} > 2\Delta_0. \quad (4)$$

Граничное значение импульса $\Delta P_c = \frac{\Delta_0 m}{p} \approx \frac{\Delta_0}{v_F}$ (так как $p \sim p_F$) определяет предельную величину бездиссипативного смещения пары в импульсном пространстве и тем самым критическую скорость $v_{sc} \approx \frac{\Delta_0}{p_F}$ движения пар, выше которой пары распадаются. При $T \neq 0$ в выражения для величин критической скорости движения пар и размытия поверхности Ферми (обусловленного взаимодействием) вместо Δ_0 войдет $\Delta(T)$. Таким образом, предельно возможное в сверхпроводниках смещение поверхности Ферми, определяемое величиной $\frac{\Delta(T)m}{p_F}$, всегда меньше величины нетемпературного размытия $\frac{2\Delta(T)m}{p_F}$ распределения Ферми.

Ток, возникающий при смещении поверхности Ферми, можно описать двумя способами.

В первой модели Друде–Лоренца [5] ток рассматривается как направленное движение всех коллективизированных электронов со скоростью дрейфа $\mathbf{v}_d$, связанной с изменением их импульсов $\mathbf{\Delta P}$ соотношением $\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{\Delta P}}{m}$, тогда плотность тока

$$\mathbf{j} = eN\mathbf{v}_d, \tag{5}$$

где N — плотность электронов.

Во второй модели Лифшица [6] выделяется центральная часть смещенной поверхности Ферми с симметричным распределением импульсов относительно центра несмещенной поверхности Ферми (рисунок). Соответствующие этой области электроны не вносят вклад в электрический ток, так как их распределение не изменяется при смещении поверхности Ферми. Ток создается только нескомпенсированными по импульсам электронами в областях *1* и *3* (рисунок), движущимися с фермиевскими скоростями. В этой модели плотность тока

$$j = eA\Delta N v_F, \tag{6}$$

где ΔN — плотность числа электронов в областях *1* и *3* или удвоенная плотность числа электронов в области *3*, A — постоянный коэффициент, величина которого обусловлена формой поверхности Ферми. Произведение Av_F определяет среднее значение скорости электронов, находящихся в области смещения поверхности Ферми в направлении тока.

Если в первом случае $\mathbf{j}$ определяется величиной средней дрейфовой скорости всех электронов при постоянстве их плотности N, то во втором случае — плотностью числа «нескомпенсированных» электронов ΔN при постоянстве их фермиевской скорости v_F. Вычислим плотность тока для сферической поверхности Ферми и заданного смещения ΔP по оси p_x в декартовых координатах импульсного пространства, используя подход, развитый в модели Лифшица.

Вследствие того что $\Delta P \ll p_F$, скорость любой частицы в объемах *1* и *3* (рисунок) по величине практически совпадает с фермиевской скоростью v_F. Соответствующая проекция скорости частиц на направление, отвечающее сдвигу поверхности Ферми по оси p_x, равна $\frac{p}{m}\cos\theta$. Тогда плотность тока в сферических координатах будет иметь вид

$$j = 2\frac{2e}{m(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_{p_F}^{p_F+\Delta P} p^3 \sin\theta\cos\theta\, dp. \tag{7}$$

Здесь два множителя 2 учитывают спиновые состояния и симметрию области *3* (рисунок). С точностью до первого порядка по смещению ΔP из (7) получаем j в рассматриваемом случае для модели Лифшица:

$$j = \frac{8\pi e p_F^3 \Delta p}{3(2\pi\hbar)^3 m} = Ae\Delta N v_F, \tag{8}$$

где $\Delta N = \frac{4\pi p_F^2 \Delta p}{(2\pi\hbar)^3}$ — плотность числа электронов в областях *1* и *3* (см. рисунок), $A = 2/3$.

В свою очередь плотность тока в модели Друде–Лоренца

$$j = eNv_d = e\frac{8\pi p_F^3 \Delta p}{3(2\pi\hbar)^3 m}, \tag{9}$$

где $N = \frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3}$ — полная плотность числа электронов и $v_d = \frac{\Delta p}{m}$. Таким образом, для нормальных металлов обе модели при сферической поверхности Ферми дают один и тот же результат [7]. При этом N и ΔN (при заданном смещении поверхности ΔP) не зависят от температуры, так как границы области «нескомпенсированных» электронов размываются при повышении температуры симметрично в обе стороны. Поэтому при любых температурах N и ΔN связаны соотношением

$$\frac{A\Delta N}{N} = \frac{v_d}{v_F} \ll 1. \tag{10}$$

У сверхпроводящих металлов ситуация качественно отличается. При $T = 0$ элементарных возбуждений нет, и распределения электронов в нормальном и сверхпроводящем металлах отличаются только тем, что в нормальном металле граница заполненных состояний резкая, а в сверхпроводящем состоянии размыта на величину $2\Delta_0$ по энергии и $\frac{2\Delta_0 m}{p_F}$ по импульсам. Как указывалось выше, величина этого размытия превышает величину максимально возможного бездиссипативного смещения поверхности Ферми у сверхпроводников. Характер смещения поверхности Ферми в токовом состоянии у сверхпроводников аналогичен смещению размытой по температуре поверхности Ферми у нормальных металлов при $T \neq 0$, если не учитывать процессов рассеяния. Поэтому при $T = 0$ плотность коллективизированных электронов N и плотность «нескомпенсированных» электронов ΔN связаны соотношением (10), что ведет к двум эквивалентным записям плотности сверхпроводящего тока (5) и (6).

Таким образом, по определению при $T = 0$, согласно модели Друде–Лоренца (5), все электроны являются сверхпроводящими: $n_s = N$. Однако при $T \neq 0$ положение изменяется: в результате термического распада пар и переброса электронов через энергетическую щель $2\Delta(T)$, в спектре появляются элементарные возбуждения. Квазичастицы заполняют одноэлектронные состояния в области размытия поверхности Ферми. Заметим, что для всех сверхпроводников отношение $\frac{2\Delta_0}{k_B T_c} > 3.5$, так что величина теплового размытия поверхности Ферми у сверхпроводников $k_B T_c$ при температурах, меньших $\frac{3}{4}T_c$, существенно меньше величины «нетеплового» размытия. Только вблизи T_c, когда $\Delta(T)$ сильно уменьшается, тепловое размытие превышает «нетепловое». Поэтому при распаде пар, образующиеся квазичастицы заполняют преимущественно свободные состояния с наинизшей энергией.

Здесь возникает принципиально важный вопрос: изменяется ли величина ΔP смещения поверхности Ферми при повышении температуры? Поскольку пары образуют жестко когерентную систему виртуальных бозе-частиц, все пары в токовом состоянии имеют один и тот же импульс $\Delta\mathbf{P}$ центра масс. Отсюда следует, что в токовом состоянии (со смещенной поверхностью Ферми) рассеяние идет между всеми возможными парными состояниями с импульсом $\Delta\mathbf{P}$. Величина $\Delta\mathbf{P}$ задается величиной сверхпроводящего тока (8). При распаде пар жесткая когерентность системы пар сохраняется независимо от их числа, пока существует сверхпроводящее состояние. Поэтому можно предположить, что первоначальная (при $T=0$) величина $\Delta\mathbf{P}$ смещения поверхности Ферми не изменяется при распаде пар и при повышении температуры вплоть до $T=T_c$.

Таким образом, во второй модели ток убывает за счет уменьшения количества создающих сверхпроводящий ток электронов в области *3* (рисунок) при постоянном, не зависящем от температуры смещении поверхности Ферми. Отсюда следует, что плотность электронов, переносящих ток при смещении на $\Delta\mathbf{P}$ поверхности Ферми при $T \neq 0$, представляет собой разность $\Delta N(0) - \Delta n_n(T)$, (здесь $\Delta n_n(T)$ — число образующихся при распаде пар элементарных возбуждений в области *1*). Эту разность и следует рассматривать как эффективную плотность электронов, создающих сверхпроводящий ток.

Обе модели можно объединить, если учесть соотношение (10). Действительно, для модели Лифшица можно записать:

$$j_s = Ae[\Delta N(0) - \Delta n_n(T)]v_F. \tag{11}$$

Воспользуемся формулой (10), чтобы перейти к полной плотности числа электронов и элементарных возбуждений в выражении (11), тогда

$$j_s = e[N(0) - n_n(T)]v_d. \tag{12}$$

Сравнивая полученное выражение с формулой Друде для сверхпроводящего тока $j_s = en_s v_d$ находим, что концентрация сверхпроводящего тока, равная общей концентрации коллективизированных электронов при $T=0$, становится зависящей от температуры и определяется выражением $n_s^*(T) = N - n_n(T)$.

Именно на концентрацию сверхпроводящих электронов $n_s^*(T)$ нормируется функция параметра порядка $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \frac{n_s^*(T)}{2}$ в теории Гинзбурга–Ландау [8] (в отличие от [4], где нормировка производится на число куперовских пар).

Следует отметить, что полученные выше качественные результаты, описывающие формирование сверхпроводящего тока, согласуются со строгими квантовомеханическими расчетами по теории БКШ [5, 9].

Таким образом, если определять понятие «плотности сверхпроводящих электронов», основываясь на формуле Друде–Лоренца (5), то n_s оказывается некоторой условной величиной, не равной в общем случае ни общей плотности электронов проводимости, ни числу куперовских пар. Поэтому в электродинамике сверхпроводников уравнением (5) можно пользоваться только в том случае, если ввести понятие эффективной концентрации сверхпроводящих электронов $n_s^* = n_s^*(T, \Delta\mathbf{P})$. При этом n_s^* уменьшается при увеличении температуры и при увеличении дрейфовой скорости v_d или величины $\Delta\mathbf{P}$ смещения поверхности Ферми в пространстве импульсов в токовом состоянии. Физически это означает, что при $T \neq 0$ поверхность Ферми в сверхпроводниках не может бездиссипативно смещаться как целое из-за наличия элементарных возбуждений, заполняющих состояния в $\mathbf{p}$-пространстве вблизи поверхности.

В модели И. М. Лифшица сверхпроводящий ток создается электронами с импульсом $p+\Delta P$, находящимися в области *3* смещенной поверхности Ферми, движущимися со средней скоростью порядка v_F (рисунок). Эти электроны принадлежат парам, т. е. имеют партнеров с импульсами $p-\Delta P$. Число таких электронов определяется величиной смещения ΔP и плотностью элементарных возбуждений и уменьшается при увеличении концентрации последних.

Заметим, что в случае многощелевых сверхпроводников возможен эффект, который является в сверхпроводниках аналогом электронно-топологического перехода $2\frac{1}{2}$-рода [6]: возникновение особенностей сверхпроводящих характеристик (например λ) при переходе в сверхпроводящее состояние, в определенных условиях (упругие деформации, давление и др.) образование новых групп электронов.

Литература

1. *Uemura Y.J.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 2665.
2. *Hirsh J.E.* // cond-mat/0312619. 2003. **2**.
3. *Carrington A., Manzano F.* // Physica C. 2003. **385**. P. 205.
4. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. М., 2000.
5. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М., 1987.
6. *Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. М., 1971.
7. *Брандт Н.Б., Чудинов С.М.* Экспериментальные методы исследования энергетических спектров электронов и фононов в металлах. М., 1983.
8. *Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. 1950. **20**. С. 1064.
9. *Фейнман Р.* Статистическая физика. М., 1978.

Поступила в редакцию
10.03.04