УДК 521.1

О ЛИНЕЙНОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Ю. Кочеткова

(*ГАИШ*)

E-mail: sunny@sai.msu.ru

Исправлены неточности метода нормализации невозмущенных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами.

Введение

Нормализация функции Гамильтона линеаризованной системы уравнений подробно описана А. П. Маркеевым [1]. Он привел алгоритмы построения матрицы приведения квадратичной части гамильтониана к каноническому виду для дифференциальных систем как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. В результате функция Гамильтона линеаризованной системы в новых координатах записывается в виде суммы независимых осцилляторов. После этого становится возможным произвести нормализацию членов более высоких порядков исходной системы уравнений, что позволит, например, получить более точные решения нелинеаризованной системы и сделать выводы об устойчивости решений с точностью до членов четвертой и выше степеней разложения по обобщенным координатам и импульсам.

Однако на практике при использовании предложенного алгоритма для систем с периодическими коэффициентами матрица приведения не давала требуемого канонического вида квадратичной части гамильтониана (не соблюдалось условие унивалентности преобразования). В настоящей работе предпринята попытка исправить неточности метода и в качестве примера исследована устойчивость треугольной точки либрации системы Солнце–Юпитер.

Постановка задачи

Рассматривается каноническая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{1}$$

где q_i и p_i $(i = 1, \ldots, n)$ — обобщенные координаты и импульсы. Начало координат

$$q_i = p_i = 0$$

является положением равновесия системы (1), устойчивым в линейном приближении. Тогда разложение гамильтониана в начале координат начинается с членов второго порядка по степеням q_i и p_i:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{2}$$

где

$$H_n = \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_n+\\+\mu_1+\ldots+\mu_n=n}} h^{(n)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\mu_1,\ldots,\mu_n}(t) \times \times q_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot q_n^{\nu_n}\cdot p_1^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\mu_n}.$$

Задача состоит в построении матрицы $\mathbf{L}$ перехода к новым координатам $(q_i, p_i) \xrightarrow{\mathbf{L}} (Q_i, P_i)$, в которых H_2 запишется в виде

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (P_k^2 + Q_k^2), \tag{3}$$

где $\pm i\sigma_k$ — характеристические показатели уравнений невозмущенного движения, соответствующего системе (1).

Свойства матрицы перехода

Для удобства дальнейших преобразований введем вектор $\mathbf{x}^{\mathbf{T}} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$, где через $x_1, \ldots, x_n$ обозначены координаты $q_1, \ldots, q_n$, а $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ соответствуют $p_1, \ldots, p_n$. Тогда уравнения невозмущенного движения системы (1) можно записать в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{IH}\cdot\mathbf{x}, \tag{4}$$

где $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix}$, а матрица $\mathbf{H}$ — вещественная, симметрическая, непрерывная, 2π-периодическая по времени.

Искомое преобразование координат $\mathbf{L}$ должно удовлетворять следующим свойствам: оно должно быть вещественным, 2π-периодическим и канонически унивалентным.

Если $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (4), r_k и s_k — вещественная и мнимая части собственного вектора мультипликатора ρ_k, соответствующего характеристическому показателю $i\sigma_k$, то матрица $\mathbf{L}$ представима как произведение матриц:

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}(t)\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}(t), \tag{5}$$

где

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \cos\mathbf{K}t & -\sin\mathbf{K}t \\ \sin\mathbf{K}t & \cos\mathbf{K}t \end{pmatrix},$$

$$\sin \mathbf{K}t = \begin{pmatrix} \sin\sigma_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin\sigma_n t \end{pmatrix},$$

$$\cos \mathbf{K}t = \begin{pmatrix} \cos\sigma_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos\sigma_n t \end{pmatrix},$$

у матрицы $\mathbf{P}$ k-й столбец: $(d_{kk}s_k)$, $n{+}k$-й столбец: $(-d_{kk}r_k)$. Чтобы выполнялось условие унивалентности преобразования, коэффициенты d_{kk} должны удовлетворять уравнению

$$d_{kk}^2 \cdot (r_k, \mathbf{I}s_k) = \frac{1}{2}.$$

Вычисленная таким образом матрица $\mathbf{L}$ приводит гамильтониан H_2 к виду (3), а систему (4) — к системе с постоянными коэффициентами.

Устойчивость треугольной точки либрации системы Солнце–Юпитер

Теперь, используя исправленный метод нормализации гамильтониана, пересчитаем устойчивость лагранжевой точки либрации системы Солнце–Юпитер.

Функция Гамильтона тела пренебрежимо малой массы в гравитационном поле Солнце–Юпитер имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 + p_2 q_1 + \\ + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - \frac{1}{1+e\cos\nu}U, \qquad (6)$$

где $e = 0,0482538$ — эксцентриситет орбиты Юпитера; ν — истинная аномалия, выполняющая функцию времени; U — потенциальная энергия:

$$U = \frac{1-\mu}{\sqrt{(q_1+\mu)^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(q_1+\mu-1)^2 + q_2^2 + q_3^2}};$$

$\mu = m_{\mathrm{Jup}}/(m_\odot + m_{\mathrm{Jup}}) = 0.0009539$ — массовый параметр (отношение масс Юпитера и Солнца).

Поскольку в квадратичную часть гамильтониана (6) координаты q_3 и p_3 входят в каноническом виде, нормализацию H_2 достаточно провести по переменным q_1, q_2, p_1 и p_2. Решив характеристическое уравнение линеаризованной системы, получим:

$$\sigma_1 = 0.9968, \quad \sigma_2 = -0.0808.$$

А матрица $\mathbf{P}$ в формуле (5):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -0.9537 & 0.1660 & 0.8628 & 4.1488 \\ -0.1875 & 0.1595 & -0.9412 & -2.3964 \\ -0.7006 & 0.1220 & -0.0254 & 2.2726 \\ 0 & 0 & 0.6864 & 3.9429 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

После этого, подставив (7) в (5), получаем нормализующую матрицу $\mathbf{L}$. Нормализацию членов гамильтониана третьего и четвертого порядка разложения можно провести методом точечных отображений [2]. Подробное описание применения этого метода для решения аналогичных задач изложено в работе [3].

В переменных действие–угол (ρ, ψ) нормализованный гамильтониан примет вид [4]

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + r_3 + Ar_1^2 + Br_1 r_2 + Cr_2^2 + \\ + r_3 \sum_{i=1}^{3} F_i(\varphi_i - \nu) r_i.$$

Условие устойчивости положения равновесия для большинства начальных условий выполняется:

$$B^2 - 4AC = (-0.1801)^2 - 4 \cdot 0.0039 \cdot 0.5529 = 0.0238 \neq 0.$$

Заключение

Таким образом, построенная в данной работе матрица приведения невозмущенной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами отвечает всем требуемым условиям (в том числе и условию унивалентности) и приводит квадратичную часть гамильтониана к каноническому виду.

В качестве примера использования этого уточненного метода рассмотрена устойчивость лагранжевой точки либрации системы Солнце–Юпитер для большинства начальных условий.

Литература

1. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.
2. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.,1972.
3. *Кочеткова А.Ю.* Исследование устойчивости точек либрации ограниченной фотогравитационной эллиптической пространственной задачи трех тел в нелинейном приближении. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1999.
4. *Маркеев А.П.* Препринт Ин-та проблем механики. 1973. №49.

Поступила в редакцию
16.04.04