ГЕОФИЗИКА

УДК 537.86:519.2; 537.876.23:551.510; 550.3

ВРЕМЕННЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ МОМЕНТОВ ДВИЖУЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ НОВОГО ПОДХОДА К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЭРГОДИЧНОСТИ

А. Г. Вологдин, Л. И. Приходько

(*кафедра физики атмосферы*)

Получены оценки математического ожидания движущихся случайных полей при усреднении на ограниченных временных и пространственных интервалах, найдены условия их состоятельности. С использованием нового подхода к пространственной эргодичности показано, что временные и пространственные оценки полностью совпадают, если случайное поле движется с постоянной скоростью, а пространственное усреднение проводится вдоль линии, совпадающей с направлением перемещения поля. Получено подтверждение гипотезы Тейлора о «замороженной» турбулентности движущегося случайного поля относительно математического ожидания.

Введение

При обработке натурных данных экспериментального исследования случайных полей в геофизических средах встает вопрос об эффективности оценок их статистических характеристик на ограниченных интервалах наблюдения. Известно, что в условиях геофизического эксперимента усреднение по ансамблю реализаций является практически недостижимым и обычно приходится усреднять данные по времени или по пространству. При этом делается предположение относительно равенства среднего по ансамблю реализаций и какого-нибудь другого типа среднего (по одной реализации), т. е. выдвигается эргодическая гипотеза [1–3]. Определение временной эргодичности для случайного поля $\xi(\mathbf{r},t)$, где $\mathbf{r}$ и t — пространственная и временная координаты, дано, например, в [1, 2].

Формулировка условия выполнения временной эргодической теоремы применительно к математическому ожиданию функции от случайного поля $\xi(\mathbf{r},t)$ состоит в следующем. Если образовать оценку математического ожидания функции $f[\xi(\mathbf{r},t)]$ на конечном временном интервале $[0,T]$, то взятая по ансамблю дисперсия этой оценки относительно соответствующего среднего значения по ансамблю должна стремиться к нулю с ростом интервала усреднения. Это утверждение можно записать в виде формулы для дисперсии оценки:

$$\lim_{T\to\infty}\sigma_T^2=\lim_{T\to\infty}\left\langle\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T f[\xi(\mathbf{r},t)]\,dt\right]^2\right\rangle\to 0, \qquad (1)$$

где для простоты положено $\langle f[\xi(\mathbf{r},t)]\rangle=0$. При условии, когда время корреляции τ_k функции $f[\xi(\mathbf{r},t)]$ существенно меньше интервала наблюдения $[0,T]$, последняя формула может быть использована для оценки необходимого значения T при допустимом уровне точности измерения.

Аналогичный подход применяется и при пространственном усреднении случайных полей $\xi(\mathbf{r},t)$, когда используется понятие пространственной эргодичности. При этом считается, что для статистически однородных пространственных случайных полей средние по ансамблю реализаций совпадают (в смысле вероятностной сходимости) со средними по пространству [2]. Отметим, что здесь задача математически сложнее, так как используется трехкратное интегрирование — интегрирование по объему. При этом время является параметром, и усреднение по пространству производится в фиксированный момент времени. При одновременном выполнении условий временной и пространственной эргодических теорем можно говорить о пространственно-временной эргодичности полностью статистически однородных (стационарных по времени и однородных по пространству) случайных полей $\xi(\mathbf{r},t)$.

В работах [4–6] разработан новый подход к пространственной эргодичности случайных полей, основанный на замене усреднения по пространству усреднением вдоль прямой линии. Такой подход позволяет снизить уровень сложности как математического, так и экспериментального описания полей в натурных условиях.

Проиллюстрируем этот подход на примере анализа математического ожидания пространственного случайного поля $\xi(\mathbf{r})=\xi(x,y,z)$. Формулировка новой теоремы пространственной эргодичности вводится аналогично соответствующей формулировке временной эргодичности, однако здесь усреднение производится вдоль прямой линии (для определенности — вдоль координаты x):

$$\langle\xi(x,y,z)\rangle=\overline{\xi(x,y,z)}_{L\to\infty}\equiv\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_0^L\xi(x,y,z)\,dx. \qquad (2)$$

Прямая черта — знак пространственного усреднения. Это определение пространственной эргодичности позволяет оценивать статистическое среднее путем усреднения по одной пространственной координате. Интервал усреднения $[0, L]$ должен обеспечивать заданную точность. Оценка математического ожидания для случайного поля $\xi(x,y,z)$ вдоль прямой на указанном интервале равна

$$\overline{\xi(x,y,z)}_L = \bar{\xi}_L \equiv \frac{1}{L}\int\limits_0^L \xi(x,y,z)\,dx. \tag{3}$$

Эта выборочная оценка математического ожидания является случайной величиной с дисперсией

$$\sigma_L^2 = \left\langle \overline{\xi_L^2} \right\rangle - \left\langle \bar{\xi}_L \right\rangle^2, \tag{4}$$

которая при выполнении гипотезы эргодичности должна стремиться к нулю при $L \to \infty$.

В геофизических средах случайные поля, примерами которых являются поля температуры, скорости, давления атмосферы или поле диэлектрической проницаемости в ионосфере, являются движущимися, т. е. имеют общий вид $\xi(\mathbf{r}(t),t) = \xi(x(t),y(t),z(t),t)$. При этом прямую зависимость случайных полей от времени, которая определяется собственной изменчивостью неоднородностей, связанной с диффузионными процессами и турбулентностью, можно опустить. Тогда случайное поле можно представить в виде $\xi(\mathbf{r}(t)) = \xi(x(t),y(t),z(t))$. В этом случае говорят о модели «замороженной» турбулентности («вмороженных» неоднородностях), когда турбулентность (неоднородности) сносится потоком, не успевая претерпевать изменений, а пространственные статистические данные получают, как правило, по временным измерениям, основываясь на гипотезе Тейлора [3, 7]. Это связано с тем, что пространственные измерительные системы существенно сложнее соответствующих временных систем, поэтому в практике как геофизических, так и радиофизических исследований информацию о пространственной структуре случайного поля обычно получают путем анализа временных данных при измерениях в фиксированных точках пространства. Новый подход к эргодичности позволяет решить вопрос об эквивалентности пространственных и временных оценок статистических характеристик, причем речь идет об эквивалентности как самих оценок, так и их дисперсий.

В настоящей работе внимание сосредоточено на анализе случайных полей $\xi(\mathbf{r}(t))$ при наличии общего движения среды (ветер, дрейф) с постоянной скоростью $\mathbf{V}$. Опираясь на новый подход к пространственной эргодичности, мы проанализируем гипотезу Тейлора. Основной целью работы является выяснение условий эквивалентности временных и пространственных оценок статистических характеристик при нахождении их на конечных интервалах наблюдения, а также выяснение условий соответствия этих оценок статистическим значениям.

В проводимом исследовании будут учтены экспериментальные факты о возможной анизотропии неоднородностей случайных пространственных полей. Так, например, в приземном слое атмосферы при устойчивой стратификации вихри вытянуты вдоль направления среднего ветра [3], а в ионосфере неоднородности ионизации вытянуты по магнитным силовым линиям [8].

Моменты первого порядка движущегося пространственного случайного поля

Анализ поля $\xi(\mathbf{r}(t))$ будем проводить в предположении полной статистической однородности. Ограничиваясь рамками корреляционной теории, рассмотрим моменты первого и второго порядка. На этом можно остановиться при решении принципиальных вопросов экспериментальной практики, а исследование моментов высших порядков будет иметь схожие алгоритмы.

Найдем дисперсию оценки математического ожидания случайного поля $\xi(\mathbf{r}(t)) = \xi(x(t),y(t),z(t))$ для изотропной и анизотропной функции автокорреляции гауссовой формы, полагая $\langle \xi(\mathbf{r}(t)) \rangle = 0$.

При изотропной функции автокорреляции гауссовой формы для дисперсии (4) при усреднении на пространственном интервале $[0, L]$ вдоль прямой линии, произвольно ориентированной в пространстве, можно получить

$$\sigma_L^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma^2 l_k L^{-1} \Phi(L/l_k), \tag{5}$$

где l_k — пространственный радиус корреляции, Φ — интеграл вероятности, σ^2 — статистическая дисперсия поля $\xi(\mathbf{r},t)$. Вычисленная дисперсия оценки для изотропной функции автокорреляции не зависит от направления линии усреднения и определяется лишь отношением пространственного радиуса корреляции к длине интервала усреднения. При $L \to \infty$ соотношение (5) свидетельствует об асимптотической состоятельности оценки (3) и выполнении условия пространственной эргодичности, т. е. $\lim\limits_{L\to\infty} \sigma_L^2 = 0$.

Рассмотрим случай анизотропной пространственной функции автокорреляции. Для получения соответствующих результатов выберем систему координат так, чтобы горизонтальная плоскость (x, y), была параллельна поверхности земли, а ось z направлена по вертикали вверх. Пусть функция автокорреляции случайного поля остается гауссовой, а неоднородности представляют собой эллипсоиды вращения, сечения которых в плоскости (x, z) суть эллипсы, направления большой оси которых составляют угол γ с осью z. Тогда функцию автокорреляции можно представить центральной поверхностью второго порядка [9]

$$\begin{aligned} B_\xi(x,y,z) &= \\ &= \sigma^2 \exp\left[-\left(a_{11}x^2 + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{33}z^2\right)\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где коэффициенты $a_{i,j}$ имеют вид

$$a_{11} = b^{-2}d^{-2}\left(d^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma\right),$$
$$a_{22} = b^{-2},$$
$$a_{13} = b^{-2}d^{-2}\left(b^2 - d^2\right)\sin\gamma\cos\gamma,$$
$$a_{33} = b^{-2}d^{-2}\left(d^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma\right).$$

Здесь d, b — большая и малая полуоси эллипсоида вращения. Видно, что в случае анизотропной функции автокорреляции дисперсия оценки математического ожидания случайного поля будет зависеть от ориентации линии усреднения. Рассмотрим общий случай, когда направление линии усреднения не совпадает с направлением вытянутости эллипса и составляет угол α с осью z в плоскости (x, z). Тогда для дисперсии, аналогичной по смыслу (5), при усреднении поля вдоль указанной линии можно найти

$$\sigma_L^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma^2\frac{d}{L}\,\frac{\Phi\left[Ld^{-1}\varphi(\alpha,\gamma)\right]}{\varphi(\alpha,\gamma)}. \quad (7)$$

Здесь и далее $\varphi(\alpha,\gamma) = \left[e^2\sin^2(\alpha-\gamma) + \cos^2(\alpha-\gamma)\right]^{1/2}$, $e = d/b$ — отношение осей эллипсоида вращения. Из последнего соотношения вытекает ряд частных случаев. Так, если линия усреднения поля совпадает с координатной осью x, то дисперсия оценки математического ожидания имеет вид

$$\sigma_L^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma^2\frac{d}{L}\frac{\Phi\left[Ld^{-1}\left(e^2\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\right)^{1/2}\right]}{\left(e^2\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\right)^{1/2}}. \quad (8)$$

Если большая ось эллипсоида неоднородностей направлена по оси z ($\gamma = 0$), а линия усреднения поля — по оси x, то дисперсия оценки среднего поля определяется отношением радиуса корреляции вдоль x (малая полуось) к длине интервала усреднения

$$\sigma_L^2 = \sqrt{\pi}\,\sigma^2 bL^{-1}\Phi(L/b). \quad (9)$$

Анализ выражений (7)–(9) показывает, что при нахождении математического ожидания случайного поля с анизотропной функцией автокорреляции линию усреднения также можно выбирать произвольно, поскольку для любой ориентации линии выполняется условие асимптотической состоятельности оценок, т. е. $\lim\limits_{L\to\infty}\sigma_L^2 = 0$. Однако следует отметить, что наиболее эффективной оценка будет для случая (9), когда отношение радиуса корреляции к длине интервала наблюдения наименьшее. Это следует иметь в виду, когда требуется определить объем выборки (длину интервала L), обеспечивающий заданную точность измерения.

Остановимся на анализе временных свойств случайных полей $\xi(\mathbf{r}(t))$. При наличии общего движения среды (ветер, дрейф) с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ зависимость от времени пространственного поля имеет вид $\xi(\mathbf{r}(t)) = \xi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{V}t) = \xi(x_0+V_xt, y_0+V_yt, z_0+Vt)$ (в неподвижной системе координат).

Если направление скорости перемещения совпадает с осью x ($V_x = V$, $V_y = 0$, $V_z = 0$), то временная оценка математического ожидания на интервале $[0, T]$ в фиксированной точке пространства равна

$$\widetilde{\xi}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(x_0+Vt, y_0, z_0)\,dt, \quad (10)$$

x_0, y_0, z_0 — координаты начала отсчета. Заменой переменной $x = x_0 + Vt$ можно перейти от временного усреднения к усреднению вдоль прямой линии — оси x. Тогда получим

$$\widetilde{\xi}_T = \frac{1}{VT}\int\limits_0^{VT} \xi(x, y_0, z_0)\,dx. \quad (11)$$

Очевидно, что для эквивалентности временной (11) и пространственной (3) оценок математического ожидания случайного поля интервал временного усреднения необходимо выбирать таким, чтобы выполнялось равенство $L = VT$. Отметим, что при выбранном пространственном интервале $[0, L]$ эквивалентный интервал временного усреднения $[0, T]$ увеличивается с уменьшением скорости перемещения V.

Если направление скорости перемещения случайного поля не совпадает с линией пространственного усреднения, то вопрос о соотношении временных и пространственных оценок средних значений и их соответствия статистическим средним, а также вопрос выбора интервалов наблюдения требует более детального рассмотрения. Без ограничения общности задачи считаем, что постоянный вектор скорости перемещения случайного поля расположен в плоскости (x, z) и имеет горизонтальную и вертикальную компоненты $V_x = V\cos\vartheta$, $V_z = V\sin\vartheta$, где ϑ — угол между вектором $\mathbf{V}$ и координатной осью x. Тогда временная оценка математического ожидания на $[0, T]$ в фиксированной точке пространства (для простоты — в начале координат) имеет вид

$$\widetilde{\xi(\mathbf{V}t)}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(V_xt, 0, V_zt)\,dt = \frac{1}{V_xT}\int\limits_0^{V_xT} \xi(x, 0, x\,\mathrm{tg}\,\vartheta)\,dx. \quad (12)$$

Аналогичная оценка математического ожидания случайного поля в один и тот же момент времени на интервале $[0, L]$ вдоль прямой, лежащей в плоскости (x, z) и составляющей угол ϑ с координатной осью x, выражается через криволинейный интеграл первого рода

$$\overline{\xi(\mathbf{r})}_L = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} \xi(x, 0, z)\,dl =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_0^{L_x} \xi[x,0,z(x)]\sqrt{1+z'^2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{L_x}\int\limits_0^{L_x} \xi(x,0,x\operatorname{tg}\vartheta)\,dx, \qquad (13)$$

где $L_x = L\cos\vartheta$. Из соотношений (12), (13) видно, что если направление скорости перемещения случайного поля совпадает с линией пространственного усреднения, то, полагая $V_xT = L_x$, что приводит к соотношению $VT = L$, можно констатировать полную эквивалентность временной и пространственной оценок математического ожидания

$$\widetilde{\xi(\mathbf{V}t)}_T = \overline{\xi(\mathbf{r})}_L. \qquad (14)$$

Таким образом, математическое ожидание движущегося с постоянной скоростью случайного поля можно находить путем усреднения как на временном (в фиксированной точке пространства), так и пространственном (в один и тот же момент времени) интервалах наблюдения, при этом временной интервал связан с пространственным соотношением $T = L/V$.

Следует подчеркнуть, что это относится как к изотропной функции автокорреляции случайного поля, так и к анизотропной. При этом дисперсии временной и пространственной оценок также совпадают. Так, для изотропной функции автокорреляции дисперсия временной оценки σ_T^2 совпадает с выражением (5), а для анизотропной — с выражением (7), где есть зависимость от ориентации вектора скорости (линии усреднения) относительно большой оси эллипса. Если скорость перемещения поля совпадает с направлением вытянутости эллипса функции автокорреляции, то дисперсия временной оценки определяется модулем скорости.

Отметим, что приведенные рассуждения фактически доказывают справедливость гипотезы Тейлора о замороженной турбулентности относительно математического ожидания случайных полей, движущихся с постоянной скоростью. Эквивалентность временных и пространственных оценок (14) и их дисперсий, а также простая связь интервалов наблюдения свидетельствуют об эффективности проиллюстрированного подхода и возможности получать информацию о пространственных свойствах случайного поля путем анализа временных измерений в одной точке.

Если линия пространственного усреднения не совпадает с направлением перемещения поля, то для изотропной функции корреляции движущегося случайного поля вследствие независимости временных и пространственных оценок от направления перемещения равенство дисперсий σ_T^2 и σ_L^2 выполняется при том же соотношении между интервалами наблюдения $L = VT$. Для анизотропного случайного поля нет полной эквивалентности между временной σ_T^2 и пространственной σ_L^2 дисперсиями оценок. Однако с позиций выполнения условий временной и пространственной эргодичности эти оценки также являются асимптотически состоятельными.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-02-16595).

Литература

1. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. М., 1976.
2. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М., 1978.
3. *Ламли Дж.Л., Пановский Г.А.* Структура атмосферной турбулентности. М., 1966.
4. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 46.
5. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Радиотехн. и электроника. 2001. **46**, №1. С. 72.
6. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №6. С. 48 (Moscow University Phys. Bull. 2000. N 6. P. 60).
7. *Taylor G.I.* // Proc. Roy. Soc. 1938. **A164**. P. 476.
8. *Гусев В.Д., Миркотан С.Ф., Драчев Л.А.* и др. // Дрейфы неоднородностей в ионосфере. №1. М., 1959.
9. *Гусев В.Д., Приходько Л.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1978. **19**, №1. С. 112 (Moscow University Phys. Bull. 1978. **33**, N 1. P. 97).

Поступила в редакцию
21.11.03