УДК 530.12: 531.51

ГРАВИТАЦИОННОЕ ЛИНЗИРОВАНИЕ НА БРАНЕ

Ю. В. Грац, В. В. Дмитриев

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: grats@string.phys.msu.ru

Получено выражение для угла отклонения света в гравитационном поле глобального монополя, вложенного во Вселенную Рэндалл–Сундрума. Показано, что угол отклонения зависит от характерного параметра модели k, и, таким образом, возникает принципиальная возможность получения ограничений на этот параметр из данных астрономических наблюдений.

Введение

Популярные в последнее время модели мира на бране основаны на гипотезе, что наш мир является гиперповерхностью (браной), вложенной в некоторое многомерное фундаментальное пространство (см. обзор [1], а также процитированную в нем литературу). Число дополнительных измерений, а также их характерный размер в различных моделях могут заметно отличаться. Вместе с тем, как правило, предполагается, что этот размер достаточно велик, и дополнительные измерения могут в принципе быть обнаружены в планируемых в недалеком будущем экспериментах.

В работе рассматривается Вселенная Рэндалл–Сундрума второго типа (RS2-модель) с помещенным на брану глобальным монополем. Исследуются особенности эффекта гравитационного линзирования, которые обусловлены наличием дополнительного измерения. Выбор объекта исследования обусловлен тем, что глобальный монополь является одним из наиболее интересных с точки зрения космологии топологических дефектов, и тем, что с эффектом линзирования связываются основные надежды на обнаружение топологических дефектов в наблюдаемой части Вселенной. Аналогичный процесс в поле другого важного для космологии типа дефектов, космической струны, был рассмотрен в работе [2].

Гравитационное поле монополя на бране

В этом разделе приведем основные результаты работы [3], в которой исследовалось гравитационное поле глобального монополя, помещенного на брану мира Рэндалл–Сундрума с одним бесконечным дополнительным пространственным измерением [4].

Прежде всего отметим, что, поскольку в рамках рассматриваемой модели предполагается, что формирующие монополь поля Стандартной модели локализованы на бране, при нахождении метрики монополя в линейном приближении в качестве его тензора энергии-импульса следует взять выражение, которое этот тензор имеет в пространстве Минковского [5]. В декартовых координатах его неравные нулю компоненты имеют вид

$$t_{00} = \frac{\eta^2}{R^2}, \quad t_{ik} = -\eta^2 \frac{x_i x_k}{R^4}, \quad R^2 = x^i x^i, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где η — энергетический масштаб спонтанного нарушения симметрии, порождающего рассматриваемый дефект.

При наличии материи на бране метрика всего пятимерного $RS2$-пространства может быть представлена в виде (подробнее см. [6])

$$ds^2 = \widehat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2N_\mu dx^\mu dy + (1+\phi)\, dy^2,$$

где

$$\widehat{g}_{\mu\nu} = e^{-2k|y|} \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right),$$

x^μ — координаты на бране ($\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$), координата y соответствует дополнительному измерению, $\widehat{g}_{\mu\nu}(x, y)$ — метрика на времениподобной гиперповерхности $y = \text{const}$ (брана локализована в точке $y = 0$), $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, а k — характерный параметр модели, который однозначно определяет входящие в действие пятимерную космологическую постоянную и натяжение браны [4].

Можно показать [6], что при наложении калибровочных условий

$$N_\mu = -\frac{\text{sgn}\ y}{8k} h_{,\mu}, \quad \phi = -\frac{\text{sgn}\ y}{4k} h_{,y}, \quad \widetilde{h}^{;\mu}_{\mu\nu} = 0,$$

где $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, а $\widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} h$ — бесследовая часть $h_{\mu\nu}$, уравнение для линейных возмущений метрики приобретает вид

$$\partial_y \left(e^{-2k|y|} \partial_y \widetilde{h}_{\mu\nu}\right) - 2k \,\text{sgn}\, y\; e^{-2k|y|} \partial_y \widetilde{h}_{\mu\nu} + \Box \widetilde{h}_{\mu\nu} =$$

$$= -16\pi G_5 \delta(y) \left[t_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}\right) t\right], \tag{2}$$

а для следа h справедливо соотношение

$$\Box h|_{y=0} = \frac{32 G_5 k}{3} t, \tag{3}$$

где $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$, G_5 — пятимерная гравитационная постоянная, которая связана с гравитационной постоянной на бране соотношением $G_4 = k G_5$, а $t = \eta^{\mu\nu} t_{\mu\nu}$.

На поверхности браны при $y = 0$ решение уравнений (2) и (3) может быть представлено в виде [3]

$$\tilde{h}_{00}(\mathbf{x}) = \frac{16G_4\pi^3\eta^2}{3k}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^2}\frac{K_2(q/k)}{K_1(q/k)},$$

$$\tilde{h}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{8G_4\pi^3\eta^2}{3k}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^2}\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{q^2}\right)\frac{K_2(q/k)}{K_1(q/k)},$$

остальные компоненты равны нулю, а

$$h(\mathbf{x}) = \frac{128G_4\pi^3\eta^2}{3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^3}.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$h_{00}(R) = \frac{8\pi G_4\eta^2}{3k}\int\limits_0^\infty dq\frac{\sin(qR)}{qR}\frac{K_0(q/k)}{K_1(q/k)},$$

$$h_{RR}(R) = \frac{8\pi G_4\eta^2}{3k}\int\limits_0^\infty dq\left(\frac{2k}{q}\frac{\sin(qR)}{qR}+\right.$$
$$\left.+\frac{K_2(q/k)}{K_1(q/k)}\left(\frac{\sin(qR)-qR\cos(qR)}{q^3R^3}\right)\right),$$

$$h_{\theta\theta}(R) = \frac{4\pi G_4\eta^2}{3k}R^2\int\limits_0^\infty dq\left(\frac{4k}{q}\frac{\sin(qR)}{qR}+\frac{K_2(q/k)}{K_1(q/k)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{-\sin(qR)+qR\cos(qR)+q^2R^2\sin(qR)}{q^3R^3}\right)\right),$$

$$h_{\varphi\varphi}(R) = h_{\theta\theta}(R)\sin^2\theta.$$

Метрику монополя на бране можно привести к более удобному для исследования виду, если ввести новую радиальную переменную r, которая связана с R соотношением

$$h_{\theta\theta}(R)+R^2 = \left[1-8G_4\pi\eta^2(1+f_1(kr))\right]r^2.$$

В терминах новой радиальной координаты

$$ds^2 = -dt^2\left[1-8G_4\pi\eta^2 f_2(kr)\right]+dr^2+ \qquad (4)$$
$$+\left[1-8G_4\pi\eta^2(1+f_1(kr))\right]r^2d\Omega,$$

где функция f_1 определяется уравнением

$$\partial_x[xf_1(x)] = \frac{1}{6}\int\limits_0^\infty dq\frac{\sin(qx)-qx\cos(qx)}{qx}\frac{K_0(q)}{K_1(q)}$$

с граничным условием $xf_1(x)|_{x\to\infty} = 0$, а

$$f_2(x) = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty dq\frac{\sin(qx)}{qx}\frac{K_0(q)}{K_1(q)}.$$

Полученные соотношения позволяют показать, что для интересных с точки зрения космологии (см. ниже) больших значений радиальной координаты ($r \gg 1/k$)

$$f_1(kr) = -\frac{1}{6k^2r^2}(2\ln(2kr)+1),\quad f_2(kr) = \frac{\ln(2kr)}{3k^2r^2}. \qquad (5)$$

Отсюда видно, что при $r\to\infty$ полученная метрика переходит в соответствующее решение, которое справедливо в четырехмерном случае. Однако в отличие от стандартной теории в мире на бране гравитационный потенциал монополя не равен нулю и на больших расстояниях ведет себя как $\ln(2kr)/k^2r^2$.

Уравнения геодезических. Эффект линзы

Полученные результаты позволяют исследовать движение свободно падающей массивной частицы или фотона в статическом гравитационном поле рассматриваемого вида.

Записывая линейный элемент (4) в виде

$$ds^2 = -dt^2A(r)+dr^2+B(r)d\Omega_2,$$
$$A(r) = 1-8\pi G_4\eta^2 f_2(kr), \qquad (6)$$
$$B(r) = r^2\left(1-8\pi G_4\eta^2(1+f_1(kr))\right),$$

находим, что отличные от нуля символы Кристоффеля равны соответственно

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}A',\quad \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2}\frac{A'}{A},\quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}B',\quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}\frac{B'}{B},$$
$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}B'\sin^2\theta,\quad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{2}\frac{B'}{B},\quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta,$$

где штрих означает производную по r. Подставляя их в уравнения геодезических и учитывая, что в силу сферической симметрии поля монополя можно считать, что орбита рассматриваемой частицы лежит в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, получаем интегралы движения

$$\frac{dt}{dp}A = 1,\quad \frac{d\varphi}{dp}B = J,\quad \left(\frac{dr}{dp}\right)^2-\frac{1}{A}+\frac{J^2}{B} = -E, \qquad (7)$$

где p — геодезический параметр, который выбран таким образом, чтобы первый из интегралов движения был равен единице, а J играет роль углового момента на единицу энергии частицы.

Из полученных соотношений следует, что $ds^2 = -E\,dp^2$. Таким образом, $E>0$ для массивных частиц и $E=0$ для фотонов. Кроме того, частица может достигать радиуса r, если

$$\frac{1}{A(r)} \geqslant \frac{J^2}{B(r)}+E.$$

Для принятых в рамках рассматриваемой модели значений параметров ($k^{-1} < 1$ мм и $G_4\eta^2 \sim 10^{-6}$) в задаче рассеяния типичной является ситуация, когда минимальное расстояние между частицей и ядром монополя удовлетворяет неравенству $k^2r^2_{\min} \gg G_4\eta^2$. Это связано с тем, что в наблюдаемой части Вселенной может находиться не более одного монополя [5], а расстояние между наблюдателем и монополем — это величина порядка $r_{\min}/G_4\eta^2$.

При этом реализуются неограниченные траектории, а $(1-E)$ играет роль квадрата скорости частицы на бесконечном удалении от монополя.

Из (7) непосредственно следует, что

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = -B + \frac{B^2}{AJ^2} - \frac{B^2E}{J^2},$$

откуда, удерживая в правой части полученного равенства слагаемые первого порядка по $G_4\eta^2$, а также используя (5) и (6), для больших расстояний ($r \gg 1/k$), получаем

$$\varphi(r\to\infty) = \pm\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial J}\frac{1}{J}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left\{8\pi G_4\eta^2 J^2 - \right.$$

$$- \frac{4\pi G_4\eta^2}{3k^2}\left[(1-E)\cos^2\varphi + \right.$$

$$\left.\left. + 2\left(1+(1-E)\cos^2\varphi\right)\ln\left(\frac{2kJ}{\sqrt{1-E}\cos\varphi}\right)\right]\right\},$$

или

$$\varphi(r\to\infty) = \pm\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon), \tag{8}$$

где

$$\varepsilon = 4\pi\eta^2 G_4 + \frac{2\pi\eta^2 G_4}{3k^2}\frac{(3-E)}{J^2}\left[\ln\left(\frac{4kJ}{\sqrt{1-E}}\right) - 1\right]. \tag{9}$$

Уравнение (8) описывает отклонение частицы на угол $\pi\varepsilon$.

Рассмотрим полученный результат подробнее в случае, когда движущейся частицей является фотон (эффект линзы). Пусть d — расстояние от наблюдателя до монополя, а L — от монополя до источника. Тогда если наблюдатель находится на линии источник–монополь, то он увидит окружность с угловым размером

$$\psi = 2\pi\varepsilon\frac{L}{L+d}. \tag{10}$$

Подстановка (9) в (10) с учетом того, что в низшем порядке по гравитационной постоянной угловой момент можно записать в виде $J = \psi d/2$, приводит к нелинейному уравнению для угла ψ. Последнее допускает приближенное решение, если учесть, что расстояние между монополем и наблюдателем заведомо удовлетворяет неравенству $d \gg 1/kG_4\eta^2$. При этом мы получаем, что с принятой точностью

$$\psi = 8\pi^2 G_4\eta^2\frac{L}{L+d} + \frac{L+d}{4\pi^2 G_4\eta^2 k^2 d^2 L}\times \\ \times\left[\ln\left(\frac{16\pi^2 G_4\eta^2 kdL}{L+d}\right) - 1\right]. \tag{11}$$

Можно также показать, что если наблюдатель находится на расстоянии s от линии источник–монополь, но внутри конуса с углом раствора $2\pi\varepsilon$ за монополем, то он увидит два изображения на угловом расстоянии, которое теперь определяется из соотношения

$$\psi' = \psi + s\left(\frac{1}{L+d} + \frac{1}{\pi\varepsilon L}\right)$$

и оказывается одного порядка с выражением (11).

Полученные нами выражения отличаются от аналогичных результатов стандартной четырехмерной космологии [5] наличием члена, который зависит от параметра модели k. Связанные с существованием дополнительного измерения поправки существенно зависят от расстояния и ведут себя приближенно как $1/d^2$.

Заключение

Гравитационное линзирование дает нам уникальный способ обнаружения в наблюдаемой части Вселенной таких экзотических объектов, как космическая струна и монополь. В статье мы рассмотрели эффект линзы в случае, когда линза порождается глобальным монополем, вложенным в брану во Вселенной Рэндалл–Сундрума второго типа. Мы показали, что, хотя поля Стандартной модели и, в частности, сам монополь локализованы на бране, наличие пятого измерения накладывает отпечаток на характер движения массивных частиц и света вблизи монополя. Как и в случае четырех пространственно-временных измерений, либо монополь на бране в зависимости от взаимного расположения источника света, монополя и наблюдателя порождает двойное изображение, либо изображением точечного источника является окружность. И в том и в другом случае угловые размеры изображения зависят от параметра модели k, и тем заметнее, чем ближе к монополю проходят лучи света.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 04-02-16476).

Литература

1. *Рубаков В.А.* // УФН. 2001. **171**, № 9. С. 913.
2. *Davis S.C.* // Phys. Lett. B. 2001. **499**, N 1–2. P. 179.
3. *Грац Ю.В., Россихин А.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. № 6. С. 11 (Moscow University Phys. Bull. 2004. N 6. P. 12).
4. *Randall L., Sundrum R.* // Phys. Rev. Lett. 1999. **83**, N 23. P. 4690.
5. *Barriola M., Vilenkin A.* // Phys. Rev. Lett. 1989. **63**, N 4. P. 341.
6. *Aref'eva I.V., Ivanov M.G.* et al. // Nucl. Phys. B. 2000. **590**, N 1–2. P. 273.

Поступила в редакцию
18.10.04