РАДИОФИЗИКА

УДК 537.86:519.2; 537.876.23:551.510; 550.3

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЭЙКОНАЛА ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

А. Г. Вологдин, Л. И. Приходько

(*кафедра физики атмосферы*)

E-mail: vologdin@phys.msu.ru

В приближении геометрической оптики рассмотрены корреляционные свойства эйконала (фазы) плоской волны в случайно-неоднородной среде с регулярным градиентом диэлектрической проницаемости. Вблизи каустической поверхности найдены радиусы корреляции в плоскости падения и в направлении, перпендикулярном плоскости падения. Показано, что при рассеянии волны на изотропных неоднородностях регулярная рефракция приводит к анизотропии корреляционных свойств фазы волны.

Для решения как прямых, так и обратных задач статистической теории распространения волн в случайно-неоднородных средах необходимо определить различные характеристики случайной волны (флуктуации фазы и амплитуды, углов прихода и др.). При этом основной и наиболее продуктивный метод решения волновых уравнений основан на использовании приближения геометрической оптики, в котором можно перейти от волновой к лучевой трактовке. В плоскослоистой среде при наличии полного внутреннего отражения лучи, отраженные от слоя, образуют каустику, которая касается лучей в точках их поворота. Строго говоря, применение метода геометрической оптики в этом случае незаконно, поскольку на каустике, как известно, амплитуда волны, вычисленная в приближении геометрической оптики, имеет особенность (обращается в бесконечность в силу обращения в нуль сечения лучевой трубки). Однако если не проводить рассмотрение, необходимое, например, для определения направления групповой скорости в вершине траектории луча при его отражении от слоя, а интересоваться лишь изменением фазы волны при распространении в плоскослоистой среде, то метод геометрической оптики можно использовать всюду, включая область отражения (см., напр., [1, формулы (24), (28)).

Получить аналитическое решение уравнения эйконала (или фазы) волны в случайно-неоднородной среде при произвольной зависимости диэлектрической проницаемости от координат невозможно. Это вынуждает при решении статистических задач прибегать к приближенным методам, и в первую очередь к методу возмущений, используя в качестве малого параметра стандарт флуктуаций диэлектрической проницаемости.

В работе [2] предложен новый нетрадиционный подход к пространственной эргодичности, когда возможна эквивалентная замена усреднения по объему усреднением вдоль прямой линии. В этой работе показано, что при определении стохастических характеристик волн при зондировании случайно-неоднородной рефрагирующей среды (например ионосферы) величину интервала пространственного наблюдения на выходе из среды можно оценить исходя из степени выполнения условия эргодичности. Доказано, что при усреднении вдоль горизонтальной прямой линии эффективность (поведение дисперсии) пространственных оценок стохастических характеристик существенно зависит от ориентации линии усреднения относительно плоскости падения, а также от угла падения зондирующей волны. Наилучшие условия наблюдения, т. е. максимальная эффективность, достигаются для горизонтальной линии, которая перпендикулярна плоскости падения волны. При этом отсутствует зависимость от угла падения. В случае произвольной ориентации горизонтальной прямой линии усреднения эффективность оценок ухудшается, достигая минимума при линии, лежащей в плоскости падения. В этой ситуации присутствует зависимость от угла падения: с его увеличением эффективность оценок падает.

Описанное поведение эффективности пространственных оценок стохастических характеристик волн при зондировании случайно-неоднородной рефрагирующей среды можно объяснить пространственными корреляционными свойствами волновых полей. В работе авторов [3] найдена пространственная автокорреляционная функции фазы волны на выходе из случайно-неоднородной плоскослоистой среды при наклонном зондировании. В то же время большой интерес представляет поведение этой функции в самой среде и в особенности вблизи области отражения волны. Поэтому в настоящей работе ставится задача исследования корреляционных свойств фазы волны вблизи каустики, которая касается лучей в точках их поворота.

Рассмотрим падение плоской волны на случайно-неоднородную плоскослоистую среду в приближении геометрической оптики. Введем прямоугольную систему координат с осью z, направленной перпендикулярно слоям. Начало координат расположим на границе раздела плоскослоистой среды со свободным пространством. Диэлектрическую проницаемость среды при $z>0$ представим в виде суммы среднего значения и флуктуационной составляющей

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \langle\varepsilon(\mathbf{r})\rangle + \varepsilon_1(\mathbf{r}).$$

Будем считать, что $\langle\varepsilon(\mathbf{r})\rangle = \varepsilon_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(z)$, при этом малым параметром является стандарт флуктуаций диэлектрической проницаемости $\sigma_\varepsilon \ll 1$. В свободном пространстве, т. е. при $z<0$, считаем, что $\varepsilon_0(\mathbf{r}) \equiv 1$, $\varepsilon_1(\mathbf{r}) \equiv 0$. Случайное поле ε_1 считаем статистически однородным, а зависимость ε_1 от времени в случайно-неоднородной среде (ионосфере), которая определяется собственной изменчивостью неоднородностей во времени, связанной с диффузионными процессами и турбулентностью, опустим.

Анализируя в рамках геометрической оптики наклонное падение волны на плоскослоистую среду, фазу волны в первом приближении теории возмущений представим в виде [4]

$$\varphi_1 \approx \varphi - \varphi_0 = \frac{k}{2}\int\limits_S \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\,ds. \qquad (1)$$

Здесь регулярная φ_0 и флуктуационная φ_1 компоненты фазы волны выражаются криволинейными интегралами вдоль невозмущенной траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$, т. е. под знак интеграла (1) входят функции $\varepsilon_0[\mathbf{r}_0(s)]$ и $\varepsilon_1[\mathbf{r}_0(s)]$, ds — элемент длины луча, k — волновое число.

Рассмотрим наклонное падение (под углом θ_0 к оси z) плоской волны на неоднородный ионосферный слой, средняя диэлектрическая проницаемость которого изменяется по линейному закону

$$\varepsilon_0(z) = 1 - z/l,$$

где l — размер регулярного градиента. Уравнение траектории луча в такой среде имеет вид параболы [2]

$$z(x) = \frac{\Delta^2 - (x - x_a - \Delta)^2}{4l\sin^2\theta_0}$$

с вершиной $z_m = l\cos^2\theta_0$ в точке $x_0 = l\sin 2\theta_0$ (координаты поворота луча), $2\Delta = 2l\sin 2\theta_0 = x_b - x_a$ — расстояние между точками входа луча в неоднородную среду x_a и выхода из нее x_b (смещение луча при отражении от неоднородного слоя). Флуктуационная компонента фазы (1) волны, вблизи каустики, т. е. при $x = x_0$, $z = z_m$ имеет вид

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_0, y, z_m) = \\ = \frac{k}{2\sin\theta_0}\int\limits_0^\Delta \varepsilon_1\left(x + x_a, y, \frac{z_m}{\Delta^2}\left(\Delta^2 - (\Delta - x)^2\right)\right)dx. \qquad (2)$$

Найдем автокорреляционную функцию флуктуационной компоненты фазы волны $\varphi_1 = \varphi_1(x_0, y, z_m)$, исходя из (2). При этом выражение под знаком интеграла является автокорреляционной функцией диэлектрической проницаемости ε_1. Предполагая пространственную статистическую однородность случайного поля диэлектрической проницаемости, выразим $\langle\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\rangle$ через $R_\varepsilon(\dots)$ — пространственный коэффициент автокорреляции диэлектрической проницаемости и ее дисперсию σ_ε^2:

$$\langle\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\rangle = \sigma_\varepsilon^2 R_\varepsilon\Big(x_2 - x_1 + x_{a2} - x_{a1}, y_2 - y_1, \\ -\frac{z_m}{\Delta^2}\left[(\Delta - x_2)^2 - (\Delta - x_1)^2\right]\Big).$$

Тогда, обозначив $x_{a_2} - x_{a1} = \rho$, $y_2 - y_1 = \eta$, получим

$$B_{\varphi_1} = \langle\varphi_1(x_{01}, y_1, z_m)\varphi_1(x_{02}, y_2, z_m)\rangle = \\ = \frac{k^2\sigma_\varepsilon^2}{4\sin^2\theta_0}\int\limits_0^\Delta\int\limits_0^\Delta dx_1\,dx_2 \times \\ \times R_\varepsilon\left(x_2 - x_1 + \rho, \eta, -\frac{z_m}{\Delta^2}[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2\Delta)]\right). \qquad (3)$$

Перейдем в (3) к новым переменным интегрирования $\xi = x_2 - x_1$ и $\zeta = (x_2 + x_1)/2$. В этих переменных выражение для функции автокорреляции фазы принимает вид

$$B_{\varphi_1} = \\ = \frac{k^2\sigma_\varepsilon^2}{4\sin^2\theta_0}\int\limits_{-\Delta}^{0} d\xi \int\limits_{+\xi/2}^{\Delta-\xi/2} R_\varepsilon\left[x+\rho, \eta, -\frac{2z_m}{\Delta^2}\xi(\zeta - \Delta)\right]d\zeta + \\ + \frac{k^2\sigma_\varepsilon^2}{4\sin^2\theta_0}\int\limits_0^\Delta d\xi \int\limits_{-\xi/2}^{\Delta+\xi/2} R_\varepsilon\left[x+\rho, \eta, -\frac{2z_m}{\Delta^2}\xi(\zeta - \Delta)\right]d\zeta. \qquad (4)$$

Преобразуя внутренние интегралы в (5), окончательно получим

$$B_{\varphi_1} = \\ = \frac{k^2\sigma_\varepsilon^2}{4\sin^2\theta_0}\int\limits_0^\Delta d\xi \int\limits_{+\xi/2}^{\Delta-\xi/2} d\zeta\Big\{R_\varepsilon\left(\xi+\rho, \eta, -\frac{2z_m\xi}{\Delta^2}(\zeta-\Delta)\right) + \\ + R_\varepsilon\left(-\xi+\rho, \eta, \frac{2z_m\xi}{\Delta^2}(\zeta-\Delta)\right)\Big\}. \qquad (5)$$

Если для пространственного коэффициента автокорреляции случайного поля диэлектрической проницаемости предположить изомерность с гауссовой формой, то для функции автокорреляции фазы вблизи каустики в неоднородном ионосферном слое можно найти

$$B_{\varphi 1}(\rho,\eta,z=z_m)=\frac{k^2\sigma_\varepsilon^2}{4\sin^2\theta_0}\exp\left\{-\frac{\eta^2}{a^2}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\Delta}d\xi\int\limits_{\xi/2}^{\Delta-\xi/2}\exp\left\{-\frac{1}{a^2}\left[\frac{4z_m^2\xi^2(\zeta-\Delta)^2}{\Delta^4}\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\exp\left(-\frac{(\xi+\rho)^2}{a^2}\right)+\exp\left(-\frac{(-\xi+\rho)^2}{a^2}\right)\right\}d\zeta, \quad (6)$$

где a — характерный масштаб флуктуаций диэлектрической проницаемости. Переходя к новым переменным интегрирования и проведя необходимые Преобразования, для функции автокорреляции фазы можно получить

$$B_{\varphi 1}(\rho,\eta,z=z_m)=\sigma_\varepsilon^2k^2al\exp\left\{-\frac{\eta^2}{a^2}\right\}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{a^2}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2z_m/a}du\exp\{-u^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta_0\}\,\mathrm{ch}\left(2u\frac{\rho}{a}\,\mathrm{tg}\,\theta_0\right)\times$$
$$\times\int\limits_{(a/4z_m)u}^{1-(a/4z_m)u}\exp\left[-u^2(v-1)^2\right]dv. \quad (7)$$

Следует подчеркнуть, что окончательное аналитическое выражение для функции автокорреляции фазы (7) является точным в рамках метода геометрической оптики. Дальнейший анализ автокорреляционных свойств флуктуаций фазы плоской волны в неоднородном слое в области ее отражения (в области каустики), описываемых двукратным интегралом с переменными пределами внутреннего интеграла, проведем численно, используя метод Симпсона.

Выберем параметры неоднородного ионосферного отражающего слоя, характерные при коротковолновом радиозондировании. Так, размер регулярного градиента (толщина слоя при нормальном падении) $l=100$ км, средний масштаб случайных неоднородностей $a=5$ км.

Коэффициенты корреляции фазы (или эйконала) плоской волны внутри неоднородного слоя в области каустики для разных углов падения волны ϑ_0 представлены на рис. 1. Точки наблюдения разнесены по оси x (в плоскости падения при $z=z_m$) на расстояние ρ. Тонкой сплошной кривой приведена гауссоида, изображающая коэффициент корреляции изотропных случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости слоя с масштабом a. Если радиус корреляции фазы волны определять по уровню $R(\rho_k/a)=e^{-1}$, то для угла падения $\vartheta_0=30°$ этот уровень достигается при $\rho_k=1.86a$, для $\vartheta_0=45°$ — при $\rho_k=2.53a$, для $\vartheta_0=60°$ — при $\rho_k=3.56a$. Таким образом, при разнесении точек наблюдения по оси x радиус корреляции фазы плоской волны существенно больше радиуса корреляции неоднородностей a, при этом увеличение радиуса корреляции ρ_k тем больше, чем больше угол падения ϑ_0.

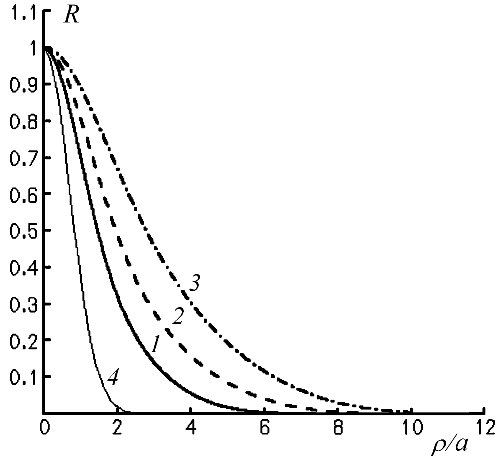

Рис. 1. Коэффициент пространственной корреляции флуктуаций эйконала волны вблизи каустики при различных углах падения волны на слой. Кривые *1–3* соответствуют углам 30, 45 и 60°

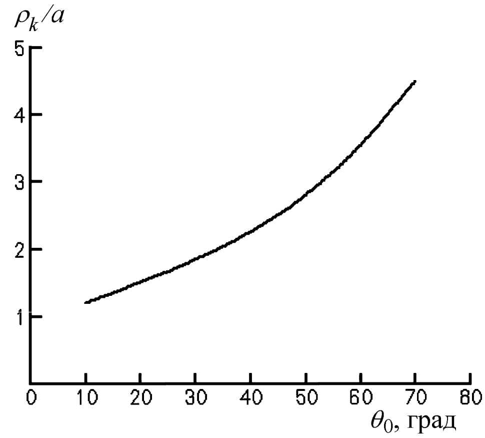

Рис. 2. Зависимость радиуса корреляции флуктуаций фазы волны в плоскости падения от угла падения волны на слой

На рис. 2 приведена зависимость радиуса корреляции фазы в области каустики от угла падения волны на слой, которая иллюстрирует рост радиуса корреляции. Качественное объяснение подобного поведения радиуса корреляции фазы плоской волны на выходе из неоднородного слоя приводится в монографии [4]. При этом отмечается, что увеличение радиуса корреляции в случае, когда лучи лежат в одной плоскости, связано с тем, что текущее расстояние между лучами в слое всюду меньше ρ и даже обращается в нуль в точке пересечения лучей. Сравнение корреляционных зависимостей флуктуаций фазы плоской волны в области отражения с соответствующими кривыми на выходе из неоднородного слоя [3] показывает, что в области отражения коэффициент корреляции спадает более круто, чем на выходе из слоя, а радиус корреляции флуктуаций фазы в области отражения меньше, чем на выходе из слоя. Таким образом, корреляция флуктуаций фазы вблизи каустики простирается на меньшие расстояния, чем на выходе из слоя. Этот результат можно объяснить влиянием «хвостов» кривых коэффициентов корреляции для точек наблюдения, находящихся на выходе из слоя, для которых путь волны (длина луча) в два раза больше.

Если точки наблюдения разнесены на расстояние η по оси y (перпендикулярно плоскости падения), то коэффициент корреляции фазы в этом направлении определяется коэффициентом корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости и радиус корреляции равен a. В этом случае оба луча параллельны друг другу и текущее расстояние между ними всюду в слое равно расстоянию η. Полученное различие радиусов корреляции флуктуаций фазы волны по осям x и y свидетельствует о том, что при рассеянии на изотропных неоднородностях диэлектрической проницаемости регулярная рефракция приводит к анизотропии флуктуаций фазы волны в области отражения (как и на выходе из отражающего слоя). При этом степень анизотропии зависит от угла падения волны на слой, с увеличением угла степень анизотропии растет.

Авторы выражают благодарность профессору Ю. Н. Черкашину за обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-02-16595).

Литература

1. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967.
2. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Радиотехника и электроника. 2002. **47**, № 9. С. 1072.
3. *Вологдин А.Г., Приходько Л.И.* // Радиотехника и электроника. 2004. **49**, № 10. С. 1218.
4. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М., 1978.

Поступила в редакцию
26.01.05