УДК 530.12:531.51

ПСЕВДОФИНСЛЕРОИДНЫЕ ПОПРАВКИ В ПРОЦЕССАХ АННИГИЛЯЦИИ

П. В. Дворников

(*кафедра теоретической физики*)

Рассмотрение квантовой теории поля в псевдофинслероидном пространстве приводит к появлению поправок в выражениях для сечений рассеяния взаимодействующих частиц. Такие поправки найдены для процессов электрон-позитронной и двухфотонной аннигиляции.

Исходные предположения и вычисления

Идеи и методы финслеровой геометрии [1, 2] могут использоваться для метрического обобщения существующих псевдоевклидовых релятивистских теорий [3–6]. В работах [3, 5, 6] была предложена и во многих аспектах изучена конкретная релятивистская финслерова метрика, названная псевдофинслероидной, и на основе свойства конформности соответствующего пространства $\mathcal{E}_g^{SR}$ был развит метод обобщения уравнений теории свободных квантованных релятивистских полей.

Рассматриваемое пространство является обобщением псевдоевклидова пространства и описывается финслеровой метрической функцией $F(g;R)$, зависящей кроме координат $\{R^p\}$ от безразмерного параметра g. Дифференцированием этой функции можно получить финслеров метрический тензор $g_{pq}(g;R)$. При обращении g в нуль тензор переходит в метрический тензор Минковского. В нашем рассмотрении мы будем считать g малым параметром.

Удобно, следуя книге [3], ввести следующие обозначения:

$$h=\sqrt{1+g^2/4},\quad g_+=h-g/2,\quad g^+=1/g_+.$$

Другое используемое свойство — существование конформного преобразования $r^i=\rho^i(g;R)$, которому соответствует конформный множитель $\varkappa(g;R)$. Явные выражения для этих преобразований можно найти в работах [3–6].

Следуя предложенному в [5, 6] конформному методу и исходя из идей калибровочной инвариантности спинорного и электромагнитного полей относительно преобразований $\psi\to e^{ie\alpha(R)}\psi$, $\bar\psi\to e^{-ie\alpha(R)}\bar\psi$, $A_p\to A_p+\partial_p\alpha(R)$, запишем лагранжиан спинорной электродинамики в виде

$$L=-\frac{1}{4}\frac{1}{J}\mathcal{D}^{pq}F_{pq}+\frac{i}{2}[\bar\psi\gamma^p\Delta_p\psi-(\Delta_p\bar\psi)\gamma^p\psi]-\varkappa m\bar\psi\psi$$

с ковариантной производной (относительно калибровочных преобразований), определяемой как

$$\Delta_p\psi=\partial_p\psi-Z_p\psi-ieA_p\psi,\quad \Delta_p\bar\psi=\partial_p\bar\psi+\bar\psi Z_p+ieA_p\bar\psi,$$

в которой $J=\sqrt{|\det(g_{pq})|}$, а Z_p — псевдофинслероидные спинорные коэффициенты связности [5, 6]. После перехода в конформное пространство (при котором $A_p\to B_i$ и $\psi\to U$) лагранжиан взаимодействия примет стандартный псевдоевклидов вид.

Используя полученные в работах [5, 6] выражения для перестановочных функций электромагнитного и спинорного полей в псевдофинслероидном пространстве, можно для операции нормального упорядочения двух полевых операторов предложить правило

$$\phi(R)\phi(R')=:\phi(R)\phi(R'):-i\varkappa(g;R)\varkappa(g;R')\Delta^-(R,R').$$

Отличие приведенного выражения от псевдоевклидова случая — замена частотных частей перестановочных функций на их финслер-обобщенные выражения.

Далее введем T-произведение двух полей по аналогии с псевдоевклидовым случаем:

$$T(\phi(R)\phi(R'))=\\=\theta(R^0-R'^0)\phi(R)\phi(R')+\theta(R'^0-R^0)\eta\phi(R')\phi(R).$$

Здесь $\eta=+1$ для бозе-полей и $\eta=-1$ для ферми-полей. Отметим, что поверхность $(R^0-R'^0)=0$ можно заменить на любую другую поверхность, целиком проходящую в пространственноподобной области и разделяющую пространство на верхний и нижний световые конусы. В частности, в качестве такой поверхности можно выбрать поверхность $\rho^0(g;R)-\rho'^0(g;R')=0$. При этом, поскольку на пространственноподобных интервалах перестановочная функция полей обращается в нуль, эти два варианта T-произведения эквивалентны.

Выражение для S-матрицы по аналогии с псевдоевклидовым случаем естественно записать в виде

$$S=T\exp\left(i\int d^4RJ(g;R)L_{\rm int}(g;R)\right).$$

Переходя к конформным координатам, в первом порядке разложения получим

$$S_1=ie\int d^4r:\bar U(g;r)\tilde\gamma^iB_i(g;r)U(g;r):.$$

Здесь $\xi(g;r) = \varkappa(g;R)$, а $\tilde{\gamma}^i$ — обычные псевдоевклидовы гамма-матрицы. Таким образом, мы пришли к стандартному выражению, соответствующему вершине в квантовой электродинамике. Подставляя записанные в [5, 6] разложения $\bar{U}(g;r)$, $B_i(g;r)$ и $U(g;r)$ по операторам рождения-уничтожения и снимая интегрирование по r, мы также получим дельта-функцию $\delta(\pm k_n \pm q_n \pm p_n)$, которая обеспечивает закон сохранения волновых чисел частиц.

Аналогичное рассмотрение в следующих порядках разложения S-матрицы показывает, что все конформные множители сокращаются и получаются выражения, имеющие стандартный вид.

Итак, после снятия интегралов по координатам все выражения будут записываться в пространстве волновых векторов, которое имеет обычную псевдоевклидову метрику, поэтому дальнейшие выкладки будут совпадать с результатами обычной спинорной электродинамики.

Тем не менее псевдофинслероидные поправки могут появиться при переходе от измеренных импульсов частиц к волновым числам, заданным в конформном пространстве. Однако для вычисления таких поправок требуется анализ процедуры измерения импульса. В частности, при осуществлении квазиклассического перехода от волновых функций к частицам оказывается, что волновые числа являются конформными образами импульса (определяемого, как обычно, через каноническое сопряжение четырехмерного вектора скорости частицы). При этом дисперсионное соотношение задается функцией Гамильтона $H(g;P) = \sqrt{\hat{B}(g;P)}\,\hat{\jmath}(g;P)$, явный вид которой приведен в [3–6].

Учитывая, что волновые числа определяются на псевдоевклидовом пространстве, мы должны строить выражение для дифференциального сечения рассеяния обычным образом:

$$d\sigma = (2\pi)^4\,\delta(p_f - p_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2\epsilon_f}. \qquad (1)$$

У рассматриваемых в настоящей работе процессов в начальном и конечном состояниях имеется по две частицы, поэтому удобно ввести кинематические инварианты $s = (p_{i1} + p_{i2})^2$, $t = (p_{i1} - p_{f1})^2$ и $u = (p_{i1} - p_{f2})^2$, после чего выражение (1) преобразуется к виду

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2},$$

где $I^2 = \frac{1}{4}\left[\left(s - (m_1+m_2)^2\right)\left(s - (m_1 - m_2)^2\right)\right]$.

Если матричный элемент можно записать через кинематические инварианты, то, очевидно, выражение для рассматриваемого сечения будет совпадать с соответствующим выражением в псевдоевклидовой теории. Псевдофинслероидные поправки в таком случае могут возникать только при переходе от s, t, u к величинам, измеряемым в исходном пространстве.

Псевдофинслероидные поправки в процессах аннигиляции

Аннигиляция электрон-позитронной пары с образованием пары фотонов. Обозначим импульсы электрона и позитрона как P_- и P_+ соответственно, а импульсы двух рождающихся фотонов K_1 и K_2. Перейдем затем по формулам конформного преобразования к волновым числам p_-, p_+, k_1 и k_2. Тогда кинематическими инвариантами будут $s = (p_- - k_1)^2$, $t = (p_- + p_+)^2$, $u = (p_- - k_2)^2$. При этом для дифференциального сечения рассеяния двухфотонной аннигиляции получим выражение стандартного вида [7]

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 ds}{t\left(t - 4m^2\right)}\left\{\left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2}\right)\right\}, \qquad (2)$$

а полное сечение запишется как

$$\sigma(\beta) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \times$$
$$\times \left[\left(3 - \beta^4\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\beta\left(2 - \beta^2\right)\right], \qquad (3)$$

где $\beta^2 = 1 - \frac{4m^2}{t}$, $r_e = e^2/m$.

Отсюда видно, что полное сечение рассеяния зависит только от одного параметра t, характеризующего суммарную энергию фотонной пары (или суммарную энергию электрон-позитрона). Если происходит столкновение встречных частиц с равными по модулю (в лабораторной системе) импульсами $\boldsymbol{P}$, то для t получаем

$$t = 4m^2 + 4\hat{\varkappa}^2(g;P)\,\hat{\jmath}^2(g;P)|\boldsymbol{P}|^2, \qquad (4)$$

и соответственно

$$\beta^2 = \frac{\hat{\varkappa}^2(g;P)\,\hat{\jmath}^2(g;P)|\boldsymbol{P}|^2}{m^2 + \hat{\varkappa}^2(g;P)\,\hat{\jmath}^2(g;P)|\boldsymbol{P}|^2}.$$

В специальной теории относительности β является отношением скорости электрона (позитрона) к скорости света. При псевдофинслероидном обобщении здесь появилась поправка. Если перейти от импульсов P к скоростям w, то получим

$$\beta^2 = \frac{h^2 w^2}{(1 - (1/2)gw)^2}. \qquad (5)$$

При $g \to 0$ очевиден переход $\beta^2 \to w^2$. Таким образом, в зависимости параметра β от скорости появились нелинейные члены; в случае малых g разложение будет иметь вид $\beta = w + \frac{1}{2}gw^2 + \frac{1}{8}g^2 w(2w^2 + 1) + \ldots$.

Подставляя выражение для β в (3), получим выражение для полного сечения рассеяния в зависимости от скорости (или импульса) частиц. Проиллюстрируем полученные результаты графиками. На рис. 1 изображена зависимость полного сечения от скорости при значениях $g=0$ и $g=0.5$ (большое значение выбрано для наглядности), а на рис. 2 — относительная финслерова поправка при $g=10^{-6}$.

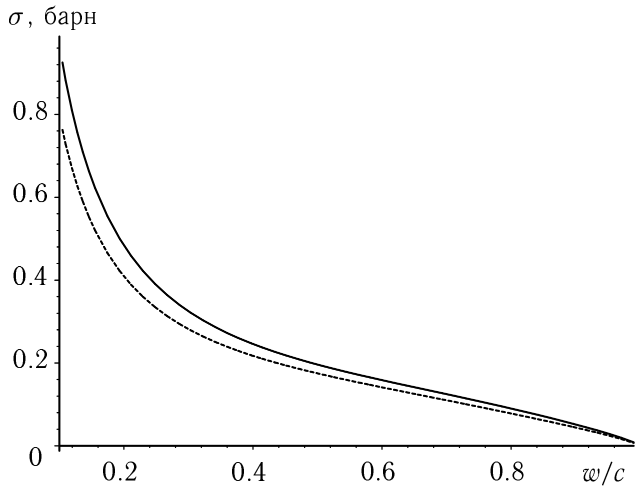

Рис. 1. Сечение электрон-позитронной аннигиляции. Пунктирная кривая — сечение при $g=0$ (псевдоевклидов случай), сплошная — при $g=0.5$

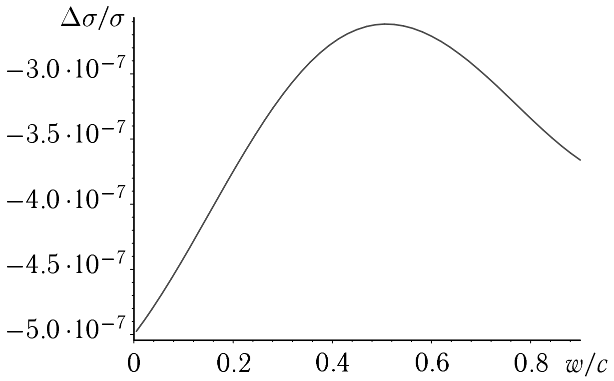

Рис. 2. Относительная псевдофинслероидная поправка $\Delta\sigma/\sigma$ в сечении электрон-позитронной аннигиляции при $g=10^{-6}$

Для вычисления дифференциального сечения обозначим через θ угол между направлениями распространения фотонов и электрона (позитрона). Тогда кинематические инварианты s и u можно выразить через 4-импульс электрона P, измеренный в исходном пространстве:

$$s=m^2-2\hat{\varkappa}^2\hat{\jmath}^2\frac{1}{h^2}\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|\right)\times \\ \times\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|-h|\boldsymbol{P}|\cos\theta\right),$$

$$u=m^2-2\hat{\varkappa}^2\hat{\jmath}^2\frac{1}{h^2}\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|\right)\times \\ \times\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|+h|\boldsymbol{P}|\cos\theta\right).$$

Подстановка полученных выражений вместе с (4) в (2) приводит к результату

$$d\sigma=\frac{m^2r_e^2\,d\Omega}{4\hat{\varkappa}^2\hat{\jmath}^2\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|\right)|\boldsymbol{P}|}\times \\ \times\frac{h}{\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|\right)^2-h^2|\boldsymbol{P}|^2\cos^2\theta}\times \\ \times\left(\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|\right)^2+h^2|\boldsymbol{P}|^2\left(1+\sin^2\theta\right)-\right. \\ \left.-\frac{2h^4|\boldsymbol{P}|^4\sin^4\theta}{\left(P_0+\frac{1}{2}g|\boldsymbol{P}|\right)^2-h^2|\boldsymbol{P}|^2\cos^2\theta}\right).$$

Более наглядные выражения получатся, если снова перейти от импульса P к скорости w электрона. Тогда при малых скоростях

$$d\sigma=\frac{r_e^2}{2}\frac{1-gw/2+w^2}{2hw}\,d\Omega$$

(относительная поправка имеет порядок малости gw), а в ультрарелятивистском случае, перейдя к нормированным на скорость света g^+ величинам w', получим

$$d\sigma=\frac{r_e^2}{2}\frac{\cos\theta\left(\sin^2\theta-\cos\theta\right)}{1-\cos\theta}\times \\ \times\left[\left(\frac{1}{w'^2}-1\right)+\frac{g}{w'}\left(\frac{1}{w'}-1\right)+\ldots\right]d\Omega,$$

откуда следует, что относительная финслерова поправка имеет порядок малости g. Однако при высоких энергиях существуют другие каналы аннигиляции, поэтому экспериментальная проверка данной поправки может оказаться затруднительной. Отметим также, что в обоих случаях поправка не привела к изменению характера угловой зависимости сечения, что также затрудняет экспериментальное обнаружение.

Образование электрон-позитронной пары фотонами представляет собой процесс, обратный по отношению к аннигиляции. Их сечения отличаются лишь выражением для потока падающих частиц, поэтому можно записать:

$$d\sigma=d\sigma_{ee}\frac{t-4m^2}{t}=\beta^2d\sigma_{ee},$$

где $d\sigma_{ee}$ — сечение (2) аннигиляции электрон-позитронной пары, полученное выше. Для полного сечения получим

$$\sigma = 2\beta^2\sigma_{ee} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(1-\beta^2\right)\left[\left(3-\beta^4\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\beta\left(2-\beta^2\right)\right].$$

Рассмотрим данный процесс в системе центра инерции. Если выразить инвариант t через энергии фотонов, то получим $t = 4(g^+)^2(K_0)^2$, и наблюдаемая поправка отсутствует. Если же измеряются импульсы (или скорости) рождающихся электрона и позитрона, то, применяя конформные преобразования, мы опять приходим к выражению (5) для β.

На рис. 3 изображена зависимость сечения процесса рождения пары от скорости w рождающихся частиц при значениях $g=0$ и $g=0.5$, а на рис. 4 — относительная финслерова поправка при $g=10^{-6}$.

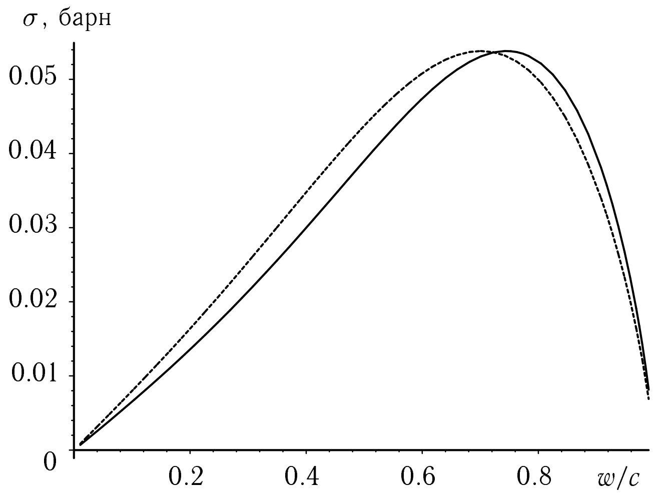

Рис. 3. Сечение двухфотонного рождения электрон-позитронной пары. Пунктирная кривая — сечение при $g=0$ (псевдоевклидов случай), сплошная — при $g=0.5$

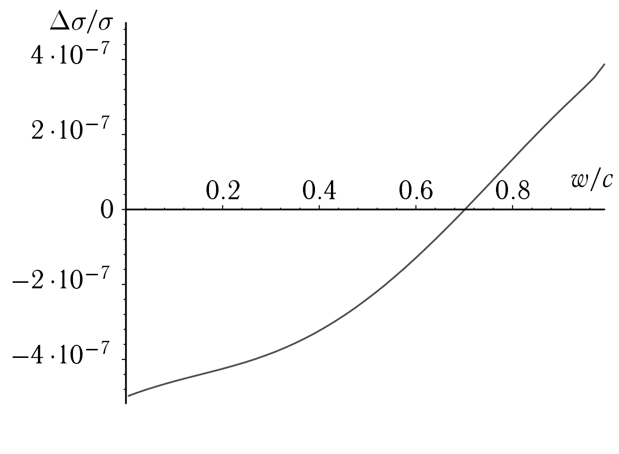

Рис. 4. Относительная псевдофинслероидная поправка $\Delta\sigma/\sigma$ в сечении двухфотонного рождения электрон-позитронной пары при $g=10^{-6}$

Одним из следствий учета финслеровых поправок должно быть смещение максимума сечения; скорость, при которой достигается максимальное значение, записывается в виде

$$w_{\max} = \frac{\beta_{\max}}{h + (1/2)g\beta_{\max}},$$

где $\beta_{\max} = 0.701$ — точка максимума в псевдоевклидовой теории. Смещение имеет порядок малости g и в принципе также может быть экспериментально обнаружено.

Заключение

Таким образом, существует возможность вычислять поправки при рассмотрении спинорной электродинамики в псевдофинслероидном пространстве $\mathcal{E}_g^{SR}$. Для этого на основе результатов работ [5, 6] была продолжена разработка квантовой теории в исследуемом пространстве. Введенный лагранжиан и S-матрица, построенная из соображений конформной инвариантности, позволили вычислить поправки в выражениях для сечений рассеяния электрон-позитронной аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары. Величины поправок могут быть проверены экспериментально.

Продолжение настоящей работы может состоять в вычислении предложенным способом псевдофинслероидных поправок для процессов и величин, по которым имеются высокоточные экспериментальные данные (в частности, поправок для аномальных магнитных моментов электрона и мюона), а также в псевдофинслероидном анализе теории электрослабых взаимодействий.

Литература

1. *Рунд Х.*Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.
2. *Asanov G.S.* Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.
3. *Асанов Г.С.* Финслероидная геометрия. М., 2004.
4. *Asanov G.S.* // Aequationes Mathematicae. 1995. **49**. P. 234.
5. *Asanov G.S.* // arXiv: math-ph/0501042.
6. *Asanov G.S.* // Rep. Math. Phys. 2005. **55**. P. 777.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая электродинамика. М., 2002.
8. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М., 1984.
9. *Бюклинг Е., Каянти К.* Кинематика элементарных частиц. М., 1975.

Поступила в редакцию
12.10.05