УДК 538.9; 538.955-405; 535.3; 537.87; 621.371

ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ И ПОТОК ЭНЕРГИИ В БИГИРОТРОПНОЙ ЛЕВОЙ СРЕДЕ

А. В. Иванов, О. А. Котельникова, А. В. Ведяев, В. А. Иванов

(*кафедра магнетизма*)

E-mail: andrei_i@ostrov.net

Впервые рассматривается периодическая *бигиротропная левая* среда с одноосной анизотропией. Рассчитан угол вращения плоскости поляризации электромагнитной волны, гармонически изменяющийся вдоль ее распространения. Когда волновой вектор стремится к π/a (a — постоянная решетки левого материала), увеличивается взаимодействие электромагнитной волны с резонансными частотами решетки и угол поворота плоскости поляризации возрастает. Для однородной бигиротропной левой среды получен вектор Умова–Пойнтинга (в отсутствие поглощения он сонаправлен групповой скорости), который при малой гиротропии противонаправлен фазовой скорости.

Метаматериал — это периодическая система из микроструктурных элементов различной формы (диски, кольца, полосы и др.), подобранных так, чтобы материал проявлял заданные физические свойства. Направленное на него коротковолновое излучение вызывает вторичную резонансную электромагнитную волну, и в результате может возникнуть эффект, при котором электромагнитная волна распространяется в одну сторону, а индуцированное поле — в другую. Такие метаматериалы относят к *левым материалам*, которым в последнее время уделяется все большее внимание [1–4]. Их именуют также материалами (средами) с отрицательной фазовой скоростью, материалами (средами) с отрицательным коэффициентом (индексом) преломления $n=\sqrt{\varepsilon\mu}<0$ (на границе правой и левой среды), обратными средами, дважды отрицательными средами (и диэлектрическая, и магнитная проницаемости отрицательны), средами с обратной волной. О возможности существования сред, в которых групповая скорость может быть отрицательной, задумывались еще около сотни лет назад. Так, в 1904 г. Х. Лэмб предложил гидродинамические модели, где для определенных областей частот фазовая и групповая скорости волн направлены навстречу друг другу [5]. В дальнейшем А. Шустер в своей монографии применил эти идеи к электромагнитным волнам в оптической области спектра [6]. В самом деле, из уравнений Максвелла в картине EDHB [7], справедливой в области микроволн, для плоской монохроматической волны с напряженностями электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ ($\sim\exp\{i(kz-\omega t)\}$) следует, что для $\varepsilon,\mu<0$ векторы $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ образуют левую тройку векторов — $\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}\}$ [8]. Для более коротких волн магнитная поляризация теряет физическое значение [9] и следует пользоваться картиной EBD уравнений Максвелла, в которой $B=H$ и диэлектрическая проницаемость содержит в себе весь линейный отклик, включая и частотную, и пространственную дисперсию. В такой картине в любых средах тройка $\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\}$ — правая. В отсутствие поглощения вектор Умова–Пойнтинга $S=\frac{c}{4\pi}E\times H$ направлен по групповой скорости. Поэтому в непоглощающих левых (правых) средах фазовая скорость отрицательна (положительна) по отношению к групповой скорости. И единственным нетривиальным свойством левого материала является отрицательная по отношению к групповой фазовая скорость электромагнитной волны и как следствие $n<0$ в любом диапазоне волн, включая оптические [10]. Левые материалы не нарушают никаких физических законов. Непротиворечивость противонаправленности групповой и фазовой скоростей отмечает и курс Ландау и Лифшица ([11], с. 398).

Из плотности электромагнитной энергии в изотропной среде $W=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}|E|^2+\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}|H|^2\right]$ (для слабозатухающих электромагнитных волн) ([11], гл. IX, § 80) следует, что левые материалы с необходимостью имеют дисперсные проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Тогда из соотношений Крамерса–Кронига вытекает, что, коль скоро вещественные $\varepsilon,\mu<0$, проницаемости содержат и мнимые компоненты, из-за которых мнимая часть показателя $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ ведет к затуханию электромагнитных волн. Но всегда можно найти область параметров, при которых возможен левый материал с пренебрежимо малым затуханием электромагнитной волны [12].

Материалы с $n<0$ предсказал и пытался обнаружить экспериментально Л. И. Мандельштам [13, 14]. В работе [15] указывалось на возможность реализации одновременно $\varepsilon,\mu<0$ в магнитных полупроводниках, в проводящих ферромагнетиках и в смеси из газовой плазмы и монополей Дирака. В радиоэлектронике давно известны одномерные и двумерные периодические структуры, в которых в микроволновой (СВЧ) и оптической областях направлены навстречу друг другу групповая и фазовая скорости [16]. Успехом увенчался поиск левых сред среди метаматериалов. В работе [17] их предложили изготавливать из тонких металлических проволочек, которые дают $\varepsilon < 0$ в определенной области частот, и кольцевых резонаторов с разрезами [18], обеспечивающих $\mu < 0$ в своем диапазоне частот электромагнитной волны. Такую идею в перекрывающейся области частот удалось реализовать в работах [19, 20], с которых начался прорыв в область целого ряда левых материалов в различных диапазонах электромагнитной шкалы. Первые материалы проявляли левые свойства на частотах менее 10 ГГц [21–24]. Затем были предложены фильтры на частотах 0.7 ТГц [25], литографически приготовлены левые материалы на частотах около 1 ТГц [26], методами нанотехнологии получены материалы с 100ТГц (длина волны 3 мкм) с постоянной квазирешетки от 0.45 до 0.9 мкм [27]. Эксперименты [28, 29] подтвердили противонаправленность фазовой и групповой скоростей в плоскопараллельной пластине из левых материалов.

Искусственные левые материалы анизотропны и не могут быть охарактеризованы скалярными значениями ε и μ [30]. Длина распространяющейся в левых материалах электромагнитной волны сравнима с их постоянной решетки, поэтому следует учитывать и периодичность среды. В правых гиротропных средах вращение плоскости поляризации линейно поляризованных электромагнитных волн обусловлено либо особенностями структуры составляющих среду молекул (оптическая активность), либо магнитным полем (круговой дихроизм — эффект Фарадея). Вклады недиагональных гирокомпонент тензоров $\hat{\mu}$ и $\hat{\varepsilon}$ в эффект Фарадея могут быть сравнимы (напр., материалы типа железо-иттриевого граната YFe_5O_{12} в ближней ИК-области спектра [31]). Для левых сред также вначале считалось, что их свойства определены лишь диэлектрической поляризацией, пока в работе [32] не продемонстрировали сильный магнитный отклик левых материалов на электромагнитное излучение диапазона порядка терагерц.

В левых средах такие эффекты, как эффект Доплера, Черенкова–Вавилова, преломления и давления света, меняются на обратные [8]. Но в левых материалах следует ожидать и гиротропные явления, поскольку их свойства определяются асимметричными структурными единицами: кольцами-резонаторами с асимметричными разрезами. В настоящей работе для бигиротропной анизотропной левой среды теоретически изучено вращение плоскости поляризации электромагнитной волны с учетом периодичности самого материала и оценен вектор Умова–Пойнтинга.

Гиротропную среду охарактеризуем антисимметричными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей с осью z, направленной вдоль распространения электромагнитной волны:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} -1 & ie(z) & 0 \\ -ie(z) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mu} = \mu \begin{pmatrix} -1 & im(z) & 0 \\ -im(z) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon > 0,\ \mu > 0). \tag{1}$$

Недиагональные компоненты в (1) выбраны в виде $e(z) = e_0 + e_1 \cos(qz)$, $m(z) = m_0 + m_1 \cos(qz)$, где $q = 2\pi/a$ — волновой вектор синусоидальной сверхрешетки вдоль оси z (a — постоянная квазирешетки левого материала); e_1, m_1 — параметры модуляции. Знаки на диагоналях выбраны так, чтобы среда в плоскости $\{xy\}$ проявляла левые свойства.

Из уравнений Максвелла в вышеупомянутой форме EDHB, которая использует напряженности электрических и магнитных полей $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ и индукции $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$, следуют уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны в рассматриваемом левом материале

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{\hat{\varepsilon}\hat{\mu}}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}} + \operatorname{grad}\ln\hat{\mu} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \operatorname{grad}(\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\ln\hat{\varepsilon}) = 0, \tag{2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{\hat{\varepsilon}\hat{\mu}}{c^2}\ddot{\boldsymbol{H}} + \operatorname{grad}\ln\hat{\varepsilon} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \operatorname{grad}(\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{grad}\ln\hat{\mu}) = 0. \tag{3}$$

Второе слагаемое в уравнении (2) пропорционально

$$\hat{\varepsilon}\hat{\mu}\ddot{\boldsymbol{E}} = \varepsilon\mu \begin{pmatrix} 1+em & -i[e(z)+m(z)] & 0 \\ i[e(z)+m(z)] & 1+em & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{E}_x \\ \ddot{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+em)\ddot{E}_x - i[e(z)+m(z)]\ddot{E}_y \\ i[e(z)+m(z)]\ddot{E}_x + (1+em)\ddot{E}_y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь компоненты векторов-столбцов соответствуют вторым производным по времени координат электрического поля электромагнитной волны $\{E_x, E_y, E_z\}$.

Третье слагаемое в уравнении (2) имеет вид

$$\operatorname{grad}\ln\hat{\mu} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \hat{\mu}^{-1}\nabla\hat{\mu} \times \nabla\boldsymbol{E} = \frac{1}{1-m^2} \begin{pmatrix} mm'E'_x + im'E'_y \\ -im'E'_x + mm'E'_y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Последнее слагаемое в (2) отсутствует, так как для выбранной геометрии $\boldsymbol{E}\cdot\nabla\ln\hat{\varepsilon}=\{E_x,E_y,0\}\cdot$ $\cdot\left\{0,0,\frac{\partial\ln\hat{\varepsilon}(z)}{\partial z}\right\}=0$.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (2), получаем систему уравнений для проекций напряженности электрического поля на оси декартовой системы координат

$$\begin{aligned}&E_x''+\frac{mm'E_x'+im'E_y'}{1-m^2}-\\&\quad-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left[(1+em)\ddot{E}_x-i(m+e)\ddot{E}_y\right]=0,\\&E_y''+\frac{mm'E_y'-im'E_x'}{1-m^2}-\\&\quad-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left[(1+em)\ddot{E}_y+i(m+e)\ddot{E}_x\right]=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Аналогичная система получается для напряженности магнитного поля.

Для циркулярно поляризованных волн, $E_\pm=$ $=E_x\pm iE_y$, система связанных дифференциальных уравнений (6) сводится к несвязанным уравнениям

$$\begin{aligned}&E_\pm''\mp m_1\frac{q\sin qz}{1\mp m}E_\pm'+\\&\quad+k_0^2[(1\mp e_0)(1\mp m_0)\mp(e_1+m_1)\cos qz]E_\pm=0\\&\qquad(e_0e_1+m_0m_1\ll e_1+m_1),\end{aligned}\tag{7}$$

где $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$. В линейном приближении по малым гиротропным элементам e_1,m_1 (ср. (1)) уравнения (7) переписываются в виде

$$E_\pm''+\mu_\mp q\sin(qz)\,E_\pm'+k_\mp{}^2(1+l_\mp\cos qz)E_\pm=0,\tag{8}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}&\mu_\mp=\mp\frac{m_1}{1\mp m_0},\quad l_\mp=\mp\frac{e_1+m_1}{1\mp e_0\mp m_0},\\&k_\mp=k_0\sqrt{(1\mp e_0)(1\mp m_0)}\cong k_0\sqrt{1\mp e_0\mp m_0}.\end{aligned}\tag{9}$$

Каждое из уравнений (8) имеет общий вид дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\mu q\sin qz\,\frac{dF}{dz}+k^2(1+l\cos qz)F=0.\tag{10}$$

Его решаем методом последовательных приближений, пользуясь тем, что в (9) параметры μ,l пропорциональности малым параметрам m_1,e_1. То есть решение уравнения (10) имеет вид $F=F_0+F_1+\ldots$, где $F_0=A\exp\{-ikz\}+B\exp\{ikz\}$ — решение невозмущенного уравнения $F_0''+k^2F_0=0$, а следующие поправки пропорциональны соответствующим степеням малых параметров $\mu,l\propto m_1,e_1$: $F_k\sim\mu^k,l^k$. Первую к решению F_0 поправку $F_1\propto m_1,e_1$ находим из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2F_1}{dz^2}+k^2F_1=h(z),\tag{11}$$

где $h(z)=i\mu k\sin qz\cdot F_0'-lk^2\cos qz\cdot F_0$. Неоднородное уравнение (11) с постоянными коэффициентами и переменной правой частью получено путем подстановки F_0+F_1 в (10). Решение уравнения (11) можно найти, зная фундаментальные решения $\varphi_{1,2}(z)=\exp\{\mp ikz\}$ однородного невозмущенного уравнения [33]:

$$F_1(z)=$$
$$=\varphi_2\int\frac{\varphi_1h}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2}\,dz-\varphi_1\int\frac{\varphi_2h}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2}\,dz+F_0.$$

Тогда для циркулярно поляризованных электромагнитных волн получаем пространственно-зависимые амплитуды напряженности электрического поля $E_\pm(z)=E_\pm{}^{(0)}(z)+E_\pm{}^{(1)}(z)$, $E_\pm{}^{(0)}(z)=Be^{ik_\pm z}$, $E_\pm{}^{(1)}(z)=\pm ae^{i(k_\pm-q)z}\pm be^{i(k_\pm+q)z}$ с малыми коэффициентами $a=k\frac{m_1q-(e_1+m_1)k}{2q(2k-q)}$, $b=k\frac{m_1q+(e_1+m_1)k}{2q(2k+q)}$. Проекция напряженности электрического поля $E_x(z)=[E_+(z)+E_-(z)]/2$ имеет вид

$$E_x^{(0)}=B\cos\left(\frac{k_+-k_-}{2}z\right)e^{i[(k_++k_-)/2]z}\cong$$
$$\cong B\cos\left(\frac{k_+-k_-}{2}z\right)e^{ik_0z},\quad E_x^{(1)}=0,$$

а проекция

$$E_y(z)=[E_+(z)-E_-(z)]/2i=E_y^{(0)}+E_y^{(1)}$$

составлена из слагаемых

$$E_y^{(0)}=B\sin\left(\frac{k_+-k_-}{2}z\right)e^{i[(k_++k_-)/2]z}\cong$$
$$\cong B\sin\left(\frac{k_+-k_-}{2}z\right)e^{ik_0z},$$

$$E_y^{(1)}=-B\left[k\frac{m_1q-(e_1+m_1)k}{2q(2k-q)}-k\frac{m_1q+(e_1+m_1)k}{2q(2k+q)}\right]\times$$
$$\times\sin qz\cdot e^{ik_0z}=B\frac{k}{q}\frac{2(e_1+m_1)-m_1(q/k_0)^2}{4-(q/k_0)^2}\sin qz\cdot e^{ik_0z}.$$

В результате находим угол вращения плоскости поляризации электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z в бигиротропной левой среде

$$\operatorname{tg}\Psi(z)=\frac{E_y^{(0)}+E_y^{(1)}}{E_x^{(0)}}=$$
$$=\frac{e_0+m_0}{2}k_0z+\frac{2(e_1+m_1)-m_1(q/k_0)^2}{4-(q/k_0)^2}k_0\frac{\sin qz}{q}.\tag{12}$$

Первый член в полученной формуле (12) сходен со стандартным выражением для эффекта Фарадея в однородной гиротропной «правой» среде. Из второго слагаемого следует, что угол поворота $\Psi(z)$ увеличивается при приближении волнового вектора k_0 к значению $q/2=\pi/a$, что сходно с резонансным взаимодействием электромагнитной волны с периодической гиротропной средой. Заметим, что при реалистических значениях волнового вектора $k_0 = q\sqrt{m_1/2(e_1+m_1)}$ периодический гиротропный вклад в (12) меняет знак, а в точках $z = N\pi/q = Na/2$ оси z (N — целое число) периодический вклад исчезает.

Для пространственно-однородного гиротропного левого материала уравнения Максвелла для электромагнитной волны можно записать в представлении ее волнового вектора $\boldsymbol{k} = \{0, 0, k\}$. Тогда из уравнений $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B} = \hat{\mu}\boldsymbol{H}$ следует векторное уравнение

$$\begin{Bmatrix} -kE_y \\ kE_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\omega\mu}{c}\begin{Bmatrix} -H_x + imH_y \\ -imH_x - H_y \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Выраженные из него компоненты напряженности магнитного поля $H_{x,y}$ позволяют получить вектор Умова–Пойнтинга

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = -\frac{c^2}{4\pi\mu\omega}\,\frac{E^2}{1-m^2}\,\boldsymbol{k}. \qquad (13)$$

При $|m| < 1$ он противонаправлен волновому вектору, как и должно было быть в негиротропной левой среде. Заметим, что гиротропность материала увеличивает поток электромагнитной энергии в $1/(1-m^2)$.

В настоящей работе теоретически изучен эффект вращения плоскости поляризации электромагнитной волны в гиротропных левых средах в объемной фазе анизотропного левого материала с учетом его периодической квазирешетки. Для реалистических значений постоянной квазирешетки $a = 0.45$–0.9 мкм левого материала [27] следует ожидать возрастание угла поворота $\Psi(z)$ (12) для поляризованных электромагнитных волн с частотами вблизи интервала 150–300 ТГц. Заметим, что в настоящее время получены материалы, оказываюшиеся левыми на частотах 150 ТГц, т. е. в ближней инфракрасной области [34]. Представляется возможным и рассмотрение слоистых негиротропных левых сред, в которых следует также ожидать магнитооптические эффекты, как и в негиротропных металлических мультислоях [35]. Из результата (13) следует, что в случае $|m| > 1$ вектор Умова–Пойнтинга в гиротропной левой среде сонаправлен с волновым вектором бегущей электромагнитной волны в отличие от негиротропных левых сред. Как видно из выражений (9), в бигиротропной среде возможно распространение волн с обеими круговыми поляризациями, с волновыми векторами $k_\pm = k_0\sqrt{(-1\pm e_0)(-1\pm m_0)}$ при условиях $|e_0| > 1$, $|m_0| > 1$ или $|e_0| < 1$, $|m_0| < 1$. При этих условиях отдельно в гироэлектрической или гиромагнитной левой среде распространяется лишь одна циркулярно поляризованная волна, тогда как другая, с мнимым волновым вектором, затухает. Поэтому гиротропные левые материалы бигиротропны. Полученный результат (12) может быть полезен и при наблюдениях поляризованного электромагнитного излучения в межгалактических магнитных полях (эффект Фарадея) с учетом левой среды в релятивистской системе отсчета [36].

Литература

1. *Tretyakov S., Nefedov I., Sihvola A.* et al. // J. Electromagn. Waves and Appl. 2003. **17**. P. 695.
2. *Pendry J.* // Science. 2004. **306**. P. 1353.
3. *Ramakrishna S.A.* // Rep. Prog. Phys. 2005. **68**. P. 449.
4. *Блиох К.Ю., Блиох Ю.П.* // УФН. 2004. **174**. С. 439.
5. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972. С. 433.
6. *Schuster A.* An introduction to the theory of optics. London, 1928 (*Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. Л.–М., 1935. С. 331).
7. *Памятных Е.А., Туров Е.А.* Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях. М., 2000.
8. *Веселаго В.Г.* // УФН. 1967. **92**. С. 517; ЖЭТФ. 1966. **52**. С. 1025.
9. *Игнатов А.М., Рухадзе А.А.* // УФН. 1981. **135**. С. 171.
10. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., 1979.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
12. *McCall M.W., Lakhtakia A., Weiglhofer W.S.* // Eur. J. Phys. 2002. **23**. P. 353.
13. *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 5. М., 1950. С. 461.
14. *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 2. М., 1947. С. 334.
15. *Веселаго В.Г.* // ФТТ. 1966. **8**. С. 3571.
16. *Силин Р.А.* http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/086.pdf .
17. *Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., Youngs I.* // Phys. Rev. Lett. 1996. **76**. P. 4773.
18. *Pendry J.B., Holden A.J., Robbins D.J., Stewart W.J.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1999. **47**. P. 2057.
19. *Smith D.R., Padillia W.J., Vier D.C.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. **84**. P. 4184.
20. *Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S.* // Science. 2001. **292**. P. 77.
21. *Shelby R.A., Smith D.R., Nemat-Nasser S.C., Schultz S.* // Appl. Phys. Lett. 2001. **78.** P. 489.
22. *Bayindir M., Aydin K., Ozbay E.* et al. // Appl. Phys. Lett. 2002. **81**. P. 120.
23. *Li K., McLean S.J., Gregor R.B.* et al. // Appl. Phys. Lett. 2003. **82**. P. 2535.
24. *Smith D.R., Pendry J.B., Wiltshire M.C.K.* // Science. 2004. **305**. P. 788.
25. *Wu D., Fang N., Sun C.* et al. // Appl. Phys. Lett. 2003. **83**. P. 201.
26. *Yen T.J., Padilla W.J., Fang N.* et al. // Science. 2004. **303**. P. 1494.

27. *Linden S., Enkrich C., Wegener M.* et al. // Science. 2004. **306**. P. 1351.
28. *Cummer S.A., Popa B.-I.* // Appl. Phys. Lett. 2004. **85**. P. 4564.
29. *Aydin K., Ozbay E., Markosj P., Soukoulis C.M.* // Appl. Phys. Lett. 2002. **81**. P. 120.
30. *Lindell I.V., Tretyakov S.A., Nikoskinen K.I.* et al. // Microwave and Opt. Tech. Lett. 2001. **31**. P. 129.
31. *Кринчик Г.С.* Физика магнитных явлений. М., 1985.
32. *Linden S., Enkrich C., Wegener M.* et al. // Science 2004. **306**. P. 1351.
33. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям. М., 1971. С. 144.
34. *Zhang S., Fan W., Panoiu N.C.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2005. **95**. P. 137404-1.
35. *Белотелов А.Е., Звездин А.К., Котов В.А., Пятаков А.П.* // ФТТ. 2003. **45**. С. 1862.
36. *Mackay T.G., Lakhtakia A.* // J. Phys. A. 2004. **37**. P. 5697.

Поступила в редакцию
07.07.05