УДК 621.373:530.12

РАЗВИТИЕ МЕТОДА СПИНОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВАКУУМА

П. А. Вшивцева, А. А.Зубрило, И. В.Кривченков, В. А.Соколов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Разработан метод спиновых коэффициентов для интегрирования уравнений нелинейной электродинамики вакуума. С помощью этого метода получено решение нелинейных уравнений параметризованной постмаксвелловской электродинамики вакуума, описывающее поле магнитного диполя.

В современной теоретической физике большую роль играют различные теоретико-полевые модели, использующие системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Такие уравнения, например, составляют основу общей теории относительности (ОТО), нелинейной электродинамики вакуума [1] и теории калибровочных полей. С общетеоретической точки зрения такая тенденция вполне понятна: природа, как показывают результаты экспериментов [2], нелинейна, и для адекватного описания происходящих в ней процессов необходимо использовать системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Как известно, различные модели нелинейной электродинамики вакуума достаточно долгое время рассматривались как абстрактная теоретическая возможность. Однако в настоящее время их статус существенно изменился, так как проведенные эксперименты по взаимодействию лазерных фотонов с гамма-квантами со всей очевидностью показали, что электродинамика в вакууме является нелинейной теорией. Поэтому в настоящее время одной из важнейших задач теоретической и математической физики является поиск различных решений нелинейных уравнений электродинамики вакуума и на их основе проведение экспериментов по проверке предсказаний различных моделей и выбор среди них наиболее адекватной природе.

Однако исследование нелинейных теоретико-полевых моделей является серьезной математической проблемой из-за отсутствия общих методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому для современной теоретической физики большое значение имеет разработка частных методов интегрирования таких уравнений, применимых только к конкретным разделам [3] теоретической физики. В частности, в ОТО был разработан метод Ньюмена–Пенроуза, на основе которого получена большая часть имеющихся точных решений уравнений Эйнштейна.

В настоящее время возникла острая необходимость разработать аналогичный метод интегрирования уравнений и в нелинейной электродинамике вакуума. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим лагранжиан нелинейной электродинамики вакуума [4–5]

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} L(J_2, J_4) - \frac{\sqrt{-g}}{c} A_i j^i, \qquad (1)$$

где $L(J_2, J_4)$ — некоторая функция от двух инвариантов $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ и $J_4 = F_{ik}F^{kn}F_{nm}F^{mi}$ тензора электромагнитного поля F_{ik}, зависящая от выбора модели нелинейной электродинамики, j^i — четырехвектор тока, g — определитель метрического тензора g_{ik}.

В частности, в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда функция L имеет вид [6]

$$L = \frac{4}{a^2}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}J_2 - \frac{a^4}{4}J_4 + \frac{a^4}{8}J_2^2}\right\},$$

в то время как в параметризованной постмаксвелловской электродинамике вакуума [7–8]

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{32\pi}\left\{2J_2 + \xi\left[(\eta_1 - 2\eta_2)J_2^2 + 4\eta_2 J_4\right] + O(\xi^2 J_2^3)\right\} - \\ - \frac{1}{c} j^n A_n, \qquad (2)$$

где $\xi = 1/B_q^2$, а $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ — свободные параметры теории.

Общековариантные уравнения для электромагнитного поля, получаемые из лагранжиана (1), имеют вид

$$\nabla_i\left[\frac{\partial L}{\partial J_2}F^{ki} + 2\frac{\partial L}{\partial J_4}F^{ki}_{(3)}\right] = -\frac{4\pi}{c} j^k, \qquad (3)$$

где ∇_i — ковариантная производная по координате x^i в пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik}, $F^{ki}_{(3)} = F^{kn}F_{nm}F^{mi}$ — третья степень тензора электромагнитного поля.

Кроме этих уравнений необходимо использовать и систему однородных уравнений

$$\nabla_k F_{nm} + \nabla_n F_{mk} + \nabla_m F_{kn} = 0. \qquad (4)$$

Введем четыре специальных базисных изотропных вектора l_k, n_k, m_k и m_k^*. Векторы l_k, n_k будем считать действительными, а m_k и m_k^* — комплексно сопряженными. Их скалярные произведения зададим в виде

$$l_k l^k = n_k n^k = m_k m^k = n_k m^k = l_k m^k = 0, \qquad l_k n^k = -m_k^* m^k = 1. \tag{5}$$

Используя эти векторы, метрический тензор псевдориманова пространства-времени и антисимметричный тензор электромагнитного поля представим следующим образом:

$$g_{ik} = l_i n_k + l_k n_i - m_i m_k^* - m_k m_i^*, \tag{6}$$

$$F_{ik} = (l_i n_k - l_k n_i) f_1 + (l_i m_k - m_i l_k) f_2 + (l_i m_k^* - m_i^* l_k) f_2^* + (n_i m_k - m_i n_k) f_3 + (n_i m_k^* - m_i^* n_k) f_3^* + i(m_i m_k^* - m_i^* m_k) f_4,$$

где скалярные коэффициенты f_1 и f_4 — действительные, а f_2 и f_3 — комплексные.

Введем обозначения $D = l^i\nabla_i$, $\delta = m^i\nabla_i$, $\Delta = n^i\nabla_i$ и $\delta^* = m^{*i}\nabla_i$ для ковариантных производных в псевдоримановом пространстве-времени по направлениям базисных векторов. С помощью этих производных можно получить двенадцать комплексных коэффициентов α, β, γ, ε, λ, μ, ν, π, ρ, σ, τ, χ, называемых спиновыми коэффициентами:

$$\alpha = \frac{1}{2}[n^i\delta^* l_i - m^{*i}\delta^* m_i], \quad \chi = m^i D l_i, \quad \pi = -m^{*i} D n_i,$$

$$\beta = \frac{1}{2}[n^i\delta l_i - m^{*i}\delta m_i], \quad \rho = m^i\delta^* l_i, \quad \lambda = -m^{*i}\delta^* n_i,$$

$$\gamma = \frac{1}{2}[n^i\Delta l_i - m^{*i}\Delta m_i], \quad \sigma = m^i\delta l_i, \quad \mu = -m^{*i}\delta n_i,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[n^i D l_i - m^{*i} D m_i], \quad \tau = m^i\Delta l_i, \quad \nu = -m^{*i}\Delta n_i.$$

Изотропные векторы l_k, n_k, m_k, m_k^*, скалярные коэффициенты f_1, f_2, f_3, f_4 и двенадцать спиновых коэффициентов определяются совместным решением системы уравнений Эйнштейна и уравнений нелинейной электродинамики (3) и (4).

Так как векторы l^k, n^k, m^k, m^{*k} образуют базис, то любой тензор может быть разложен по этому базису. Поэтому и ковариантные производные базисных векторов могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
\nabla_i l_k = {} & l_i[(\gamma+\gamma^*)l_k - \tau^* m_k - \tau m_k^*] + \\
& + n_i[(\varepsilon+\varepsilon^*)l_k - \chi^* m_k - \chi m_k^*] + \\
& + m_i[-(\beta^*+\alpha)l_k + \sigma^* m_k + \rho m_k^*] + \\
& + m_i^*[-(\beta+\alpha^*)l_k + \rho^* m_k + \sigma m_k^*], \\
\nabla_i n_k = {} & l_i[-(\gamma+\gamma^*)n_k + \nu m_k + \nu^* m_k^*] + \\
& + n_i[-(\varepsilon+\varepsilon^*)n_k + \pi m_k + \pi^* m_k^*] + \\
& + m_i[(\beta^*+\alpha)n_k - \lambda m_k - \mu^* m_k^*] + \\
& + m_i^*[(\beta+\alpha^*)n_k - \mu m_k - \lambda^* m_k^*], \\
\nabla_i m_k = {} & l_i[\nu^* l_k - \tau n_k + (\gamma-\gamma^*)m_k] + \\
& + n_i[\pi^* l_k - \chi n_k + (\varepsilon-\varepsilon^*)m_k] + \\
& + m_i[-\mu^* l_k + \rho n_k - (\alpha-\beta^*)m_k] + \\
& + m_i^*[-\lambda^* l_k + \sigma n_k + (\alpha^*-\beta)m_k], \\
\nabla_i m_k^* = {} & l_i[\nu l_k - \tau^* n_k + (\gamma^*-\gamma)m_k^*] + \\
& + n_i[\pi l_k - \chi^* n_k + (\varepsilon^*-\varepsilon)m_k^*] + \\
& + m_i[-\lambda l_k + \sigma^* n_k + (\alpha-\beta^*)m_k^*] + \\
& + m_i^*[-\mu l_k + \rho^* n_k - (\alpha^*-\beta)m_k^*].
\end{aligned}$$

Подставим выражения (6) в уравнение (4). Учитывая соотношения (5) и умножая полученное уравнение на векторы изотропной тетрады, найдем линейно независимые уравнения

$$\begin{aligned}
& \delta^* f_2^* - \delta f_2 + i\Delta f_4 - (2\beta-\tau)f_2 + (2\beta^*-\tau^*)f_2^* + \\
& \quad + \nu f_3^* - \nu^* f_3 + (\mu^*-\mu)f_1 + i(\mu^*+\mu)f_4 = 0, \\
& \delta^* f_3^* - \delta f_3 + iDf_4 - (2\alpha-\pi)f_3^* + (2\alpha^*-\pi^*)f_3 - \\
& \quad - \chi^* f_2^* + \chi f_2 + (\rho-\rho^*)f_1 - i(\rho+\rho^*)f_4 = 0, \\
& \delta^* f_1 - \Delta f_3 + Df_2 + (2\varepsilon-\rho)f_2 + (2\gamma^*-\mu^*)f_3 - \\
& \quad - \lambda f_3^* + (\pi-\tau^*)f_1 - \sigma^* f_2^* - i(\pi+\tau^*)f_4 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Совершенно аналогично из уравнения (3) получим

$$\begin{aligned}
& \delta^*\{Y_2 f_3^* + 2Y_4 f_3^*[f_1^2 + if_1f_4 + f_2f_3^* + 3f_2^*f_3 - f_4^2]\} + \\
& + \delta\{Y_2 f_3 + 2Y_4 f_3[f_1^2 - if_1f_4 + f_2^*f_3 + 3f_2f_3^* - f_4^2]\} - \\
& - D\{Y_2 f_1 + 2Y_4[f_1^3 + i(f_2f_3^* - f_2^*f_3)f_4 + 2(f_2f_3^* + f_2^*f_3)f_1]\} - \\
& - Y_2\{i(\rho-\rho^*)f_4 - \pi f_3^* - \pi^* f_3 - (\rho+\rho^*)f_1 - \\
& - \chi f_2 - \chi^* f_2^* + 2\alpha^* f_3 + 2\alpha f_3^*\} - \\
& - 2Y_4\{i[\pi^* f_1f_3 - \pi f_1f_3^* - \chi f_1f_2 + \chi^* f_1f_2^* + 2\alpha f_1f_3^* - \\
& - 2\alpha^* f_1f_3 + \rho f_2f_3^* - \rho^* f_2^*f_3 + 3\rho f_2^*f_3 - 3\rho^* f_2f_3^* - \\
& - (\rho-\rho^*)f_4^2]f_4 + f_1^2[2\alpha f_3^* + 2\alpha^* f_3 - \pi^* f_3 - \pi f_3^* - \\
& - (\rho+\rho^*)f_1 - \chi f_2 - \chi^* f_2^*] + f_4^2[\pi f_3^* + \pi^* f_3 - \\
& - 2\alpha^* f_3 - 2\alpha f_3^* + \chi^* f_2^* + \chi f_2] + (2\alpha-\pi)f_2f_3^{*2} + \\
& + (2\alpha^*-\pi^*)f_3^2f_2^* - \chi f_2^2f_3^* - \chi^* f_2^{*2}f_3 - 3\pi f_2^*f_3f_3^* - \\
& - 3\pi^* f_2f_3f_3^* - 3\chi f_2f_2^*f_3 - 3\chi^* f_2f_2^*f_3^* - (\rho+3\rho^*)f_1f_2f_3^* - \\
& - (\rho^*+3\rho)f_1f_2^*f_3 + 6\alpha f_2^*f_3f_3^* + 6\alpha^* f_2f_3f_3^*\} = -\frac{4\pi}{c}j^L, \\
& \delta^*\{Y_2 f_2^* + 2Y_4 f_2^*[f_1^2 - if_1f_4 + f_2^*f_3 + 3f_2f_3^* - f_4^2]\} + \\
& + \delta\{Y_2 f_2 + 2Y_4 f_2[f_1^2 + if_1f_4 + f_2f_3^* + 3f_2^*f_3 - f_4^2]\} + \\
& + \Delta\{Y_2 f_1 + 2Y_4[f_1^3 + i(f_2f_3^* - f_2^*f_3)f_4 + 2(f_2f_3^* + f_2^*f_3)f_1]\} - \\
& - Y_2\{i(\mu-\mu^*)f_4 - (\mu+\mu^*)f_1 - (2\beta-\tau)f_2 + \\
& + \nu f_3^* + \nu^* f_3 - (2\beta^*-\tau^*)f_2^*\} - \\
& - 2Y_4\{i[(\tau-2\beta)f_1f_2 - (\tau^*-2\beta^*)f_1f_2^* + \nu f_1f_3^* - \\
& - \nu^* f_1f_3 + (\mu-3\mu^*)f_2f_3^* - (\mu^*-3\mu)f_2^*f_3 + \\
& + (\mu^*-\mu)f_4^2]f_4 + f_1^2[\nu f_3^* + \nu^* f_3 + (\tau-2\beta)f_2 + \\
& + (\tau^*-2\beta^*)f_2^* - (\mu+\mu^*)f_1] + f_4^2[(2\beta^*-\tau^*)f_2^* + \\
& + (2\beta-\tau)f_2 - \nu f_3^* - \nu^* f_3] + (\tau-2\beta)f_3^*f_2^2 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+(\tau^*-2\beta^*)f_3f_2^{*2}-(3\mu^*+\mu)f_1f_2f_3^*-(3\mu+\mu^*)f_1f_2^*f_3+\\
+3\nu^*f_2f_3f_3^*+3\nu f_2^*f_3f_3^*+3(\tau-2\beta)f_2f_2^*f_3+\\
+3(\tau^*-2\beta^*)f_2f_2^*f_3^*+\nu f_2f_3^{*2}+\nu^*f_2^*f_3^2\big\}=-\frac{4\pi}{c}j^N,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
D\big\{Y_2f_2^*+2Y_4f_2^*\left[f_1^2+f_2^*f_3-if_1f_4+3f_2f_3^*-f_4^2\right]\big\}+\\
+\Delta\big\{Y_2f_3^*+2Y_4f_3^*\left[f_1^2+f_2f_3^*+if_1f_4+3f_2^*f_3-f_4^2\right]\big\}+\\
+i\delta\big\{Y_2f_4+2Y_4\left[i(f_2^*f_3-f_2f_3^*)f_1-f_4^3+2(f_2f_3^*+f_2^*f_3)f_4\right]\big\}-\\
-Y_2\big\{i(\tau-\pi^*)f_4-(\tau+\pi^*)f_1+(2\gamma-\mu)f_3^*+\lambda^*f_3-\\
-\sigma f_2-(2\varepsilon^*-\rho^*)f_2^*\big\}-\\
-2Y_4\big\{i\left[(2\varepsilon^*-\rho^*)f_1f_2^*+(2\gamma-\mu)f_1f_3^*-\sigma f_1f_2-\right.\\
\left.-\lambda^*f_1f_3+(\tau-3\pi^*)f_2f_3^*+(3\tau-\pi^*)f_2^*f_3\right]f_4+\\
+f_1^2\left[\lambda^*f_3+(2\gamma-\mu)f_3^*+(\rho^*-2\varepsilon^*)f_2^*-(\tau+\pi^*)f_1-\right.\\
\left.-\sigma f_2\right]+f_4^2\left[(\mu-2\gamma)f_3^*+\sigma f_2-\lambda^*f_3+(2\varepsilon^*-\rho^*)f_2^*+\right.\\
\left.+i(\pi^*-\tau)f_4\right]+\left[3(\rho^*-2\varepsilon^*)f_2^*f_3^*+(2\gamma-\mu)f_3^{*2}-\right.\\
\left.-3\sigma f_2^*f_3-\sigma f_2f_3^*+3\lambda^*f_3f_3^*\right]f_2-\left[(\tau+3\pi^*)f_2f_3^*+\right.\\
\left.+(3\tau+\pi^*)f_2^*f_3\right]f_1+(\rho^*-2\varepsilon^*)f_2^{*2}f_3+\lambda^*f_2^*f_3^2+\\
+3(2\gamma-\mu)f_2^*f_3f_3^*\big\}=-\frac{4\pi}{c}j^M, \qquad (8)
\end{gathered}
$$

где введены обозначения $Y_2=\partial L/\partial J_2$, $Y_4=\partial L/\partial J_4$.

К уравнениям (7) и (8) необходимо добавить уравнения Эйнштейна, записанные в терминах спиновых коэффициентов.

В зависимости от постановки задачи возможны три основных способа применения данного метода для нахождения точных решений уравнений нелинейной электродинамики вакуума. Первый из них состоит в решении уравнений (7) и (8) на фоне псевдоевклидова пространства-времени. В этом случае в гравитационной части уравнений все независимые проекции тензора Вейля и тензора энергии–импульса вещества следует положить равными нулю.

В случае если решение уравнений нелинейной электродинамики вакуума ищется на фоне некоторого неплоского пространства-времени, то необходимо использовать второй способ. В этом случае спиновые коэффициенты и компоненты изотропной тетрады являются известными функциями и их следует подставить в уравнения (7) и (8) нелинейной электродинамики.

И, наконец, третий способ применения данного метода для интегрирования уравнений нелинейной электродинамики вакуума предполагает учет влияния тензора энергии–импульса электромагнитного поля

$$
T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left\{[Y_2+J_2Y_4]F_{ik}^{(2)}-\frac{1}{4}\left[L-(2J_4-J_2^2)Y_4\right]g_{ik}\right\}
$$

на создаваемое гравитационное поле. В последнем случае тетрадные проекции тензора Φ_{ik} и Λ имеют вид

$$
\Phi_{ik}=\frac{4\pi G}{c^4}\left[T_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}T\right],\quad \Lambda=\frac{\pi G}{3c^4}T.
$$

Таким образом, выбирая модель нелинейной электродинамики вакуума и подставляя выражение для ее лагранжиана в соотношения (8), получаем замкнутую систему (7)–(8) дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно интегрировать при наличии определенных симметрий у искомой полевой конфигурации.

В частности, для параметризованной постмаксвелловской электродинамики вакуума, описываемой лагранжианом (2), пренебрегая собственным гравитационным полем, можно найти аксиально симметричное решение уравнений (7)–(8), соответствующее полю магнитного диполя:

$$
\begin{aligned}
F_{31}^{(0)}=-\frac{|\boldsymbol{m}|}{r^2}\left\{1+\frac{3r_g}{2r}+\frac{112\eta_1\xi|\boldsymbol{m}|^2}{33r^6}\right\}\sin^2\theta+&\\
+\frac{21\eta_1\xi|\boldsymbol{m}|^3}{11r^8}\sin^4\theta&,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{32}^{(0)}=\frac{2|\boldsymbol{m}|}{r}\left[1+\frac{3r_g}{4r}+\frac{16\eta_1\xi|\boldsymbol{m}|^2}{33r^6}\right]\sin\theta\cos\theta-&\\
-\frac{12\eta_1\xi|\boldsymbol{m}|^3}{11r^7}\sin^3\theta\cos\theta&,
\end{aligned}
$$

где $\boldsymbol{m}$ — вектор магнитного дипольного момента.

Интегрирование уравнений (7)–(8) для других моделей нелинейной электродинамики вакуума будет продолжено в последующих работах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 04-02-16604) и гранта Президента РФ (НШ-4476.2006.2).

Литература

1. *Кадышевский В.Г., Родионов В.Н.* // ТМФ. 2003. **136**, № 3. С. 517.
2. *Burke D.L., Feld R.C., Horton-Smith G.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. **79**. P. 1626.
3. *Денисова И.П.* // Дифф. уравн. 1999. **35**, № 7. С. 935.
4. *Денисов В.И.* // ТМФ. 2002. **132**, № 2. С. 211.
5. *Denisov V.I.* // Phys. Rev. D. 2000. **61**. P. 036004.
6. *Денисова И.П.* Введение в тензорное исчисление и его приложения. М., 2004.
7. *Denisov V.I., Krivchenkov I.V., Kravtsov N.V.* // Phys. Rev. D. 2004. **69**. P. 066008.
8. *Denisov V.I., Svertilov S.I.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**, N 6. P. 063002.

Поступила в редакцию
17.10.05