РАДИОФИЗИКА

УДК 550.388.2

ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЛУЧЕВОГО ВЕКТОРА В ПРИБЛИЖЕНИИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

О. К. Власова*), Л. И. Приходько

(*кафедра физики атмосферы*)

Рассмотрены флуктуации луча и амплитуды волны вдоль луча в случайной в среднем однородной среде в приближении геометрической оптики. Решение задачи основано на представлении процесса рассеяния в виде динамических стохастических уравнений типа уравнения Ланжевена. В предположении, что радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости мал по сравнению с расстоянием, рассеяние можно рассматривать как процесс Маркова и перейти от динамических уравнений к уравнению Эйнштейна–Фоккера [1]. В результате решения уравнения Эйнштейна–Фоккера получена плотность вероятности положения и направления луча и амплитуды волны.

Решение задачи диффузии луча с помощью представления флуктуационного процесса марковским рассматривалось в целом ряде работ (см., напр., [1–3]), однако для полного описания рассеяния волны необходимо учесть и флуктуации амплитуды вдоль луча.

Рассмотрим уравнение эйконала и уравнение переноса для амплитуды нулевого приближения геометрической оптики [4]

$$(\nabla_{\boldsymbol r}\varphi)^2=\varepsilon, \tag{1}$$

$$2(\nabla_{\boldsymbol r}\varphi\,\nabla_{\boldsymbol r}A)+A\Delta\varphi=0, \tag{2}$$

где A — амплитуда, φ — фаза волны, поле имеет в каждой точке структуру плоской волны

$$u=Ae^{ik\varphi},$$

$\varepsilon=n^2$ — диэлектрическая проницаемость среды, которую представим в виде суммы регулярной и случайной составляющих

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_f.$$

Уравнению эйконала (1) эквивалентны уравнения луча [4]

$$\frac{d\boldsymbol r}{d\sigma}=\boldsymbol S,\quad \frac{d(n\boldsymbol S)}{d\sigma}=\nabla_{\boldsymbol r}n, \tag{3}$$

где $\boldsymbol S$ — единичный вектор касательной к лучу, который для среды в среднем изотропной является также и нормалью к фазовому фронту, σ — длина дуги, пройденной лучом,

$$\boldsymbol S=\frac{\nabla_{\boldsymbol r}\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{4}$$

Уравнение переноса (2) можно записать в виде динамического стохастического уравнения для амплитуды. Из определения (4) следует

$$\nabla_{\boldsymbol r}\varphi=\boldsymbol S\sqrt{\varepsilon},\quad \Delta\varphi=\operatorname{div}\left(\boldsymbol S\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Учитывая, что $\boldsymbol S\nabla_{\boldsymbol r}A=dA/d\sigma$, получим вместо (2)

$$\frac{dA}{d\sigma}=-\frac{A}{2\sqrt{\varepsilon}}\left\{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{div}\boldsymbol S+\boldsymbol S\frac{\nabla_{\boldsymbol r}\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\}. \tag{5}$$

Представим теперь уравнения (3), (5) в виде динамических уравнений вида

$$\frac{dk_i}{ds}=v_i(\boldsymbol k,s)+f_i(\boldsymbol k,s), \tag{6}$$

где $v_i(\boldsymbol k,s)$ — детерминированные, а $f_i(\boldsymbol k,s)$ — случайные функции. Если случайные функции обладают следующими свойствами: 1) $f_i(\boldsymbol k,s)$ — гауссово случайное поле в пространстве $(\boldsymbol k,s)$; 2) $\langle f_i(\boldsymbol k,s)\rangle=0$, 3) $\langle f_i(\boldsymbol k,s)f_k(\boldsymbol k',s')\rangle=2\delta(s-s')\times$ $\times F_{ik}(\boldsymbol k,\boldsymbol k',s)$, то плотность вероятности для системы (6), т. е. функция

$$P_s(\boldsymbol x)=\langle\delta_n(\boldsymbol k(s)-\boldsymbol x)\rangle$$

(здесь $\boldsymbol k(s)$ — решение (1), соответствующее определенной реализации $\boldsymbol f(\boldsymbol k,s)$, а усреднение проводится по множеству всех реализаций $\boldsymbol f$), удовлетворяет уравнению Эйштейна–Фоккера

$$\frac{\partial P_s(\boldsymbol x)}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{[v_k(\boldsymbol x,s)+A_k(\boldsymbol x,s)]P_s(\boldsymbol x)\}-\\-\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}[F_{kl}(\boldsymbol x,\boldsymbol x,s)P_s(\boldsymbol x)]=0. \tag{7}$$

В уравнении (7) введено обозначение

$$A_k(\boldsymbol x,s)=\left[\frac{\partial F_{kl}(\boldsymbol x,\boldsymbol y,s}{\partial x_l}\right]_{\boldsymbol y=\boldsymbol x}.$$

*) Центр гидрофизических исследований.

Для реальных задач корреляционная функция не удовлетворяет условию δ-корреляции, в этой связи под $F_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ следует понимать величину

$$F_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)=\int\limits_0^s B_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s,s')\,ds'. \tag{8}$$

Для больших по сравнению с радиусом корреляции s, $s\gg s_0$, можно использовать формулу

$$F_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle f_k(\boldsymbol{x},s)f_l(\boldsymbol{y},s')\,ds'. \tag{9}$$

Для представления уравнений (3), (5) в виде уравнения (6), как показано в работе [1], следует от переменной σ перейти к переменной z, вдоль которой первоначально направлен луч, иначе условие 3 не может быть выполнено. Этот переход требует ограничения флуктуаций направления луча, а именно:

$$\langle\boldsymbol{S}_\perp^2\rangle\ll 1. \tag{10}$$

Из решения задачи диффузии луча [1] следует, что (10) можно представить в виде

$$\overline{\varepsilon_f^2}\frac{z}{r_0}\ll 1, \tag{11}$$

где r_0 — радиус корреляции флуктуаций неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Помимо перехода от σ к z, как показано в работах [3, 2], для записи уравнений луча в виде (6) целесообразно воспользоваться методом последовательных приближений. Поскольку

$$z\gg r_0, \tag{12}$$

то из неравенства (11) следует

$$\overline{\varepsilon_f^2}\ll 1, \tag{13}$$

и диэлектрическую проницаемость можно записать следующим образом:

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\alpha\varepsilon_\alpha,\alpha\ll 1. \tag{14}$$

Итак, перейдем в уравнениях (3) от длины дуги к координате z, вдоль которой первоначально направлен луч, и представим решение в виде ряда по степеням α. С точностью до $O(\alpha^2)$ получим уравнения, описывающие диффузию луча [2]:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_\perp}{dz}=\boldsymbol{S}_\perp,\quad \frac{d\boldsymbol{S}_\perp}{dz}=\frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\nabla_{\boldsymbol{r}_\perp}\varepsilon_\alpha, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{r}_\perp=\boldsymbol{r}_\perp\{x,y\}$, $\boldsymbol{S}_\perp=\boldsymbol{S}_\perp\{S_x,S_y\}$.

Остановимся подробнее на получении динамического уравнения типа уравнения Ланжевена (6) для амплитуды волны исходя из выражения (5).

Как и в случае решения задачи диффузии луча, переходим сначала от длины дуги σ к координате z, вдоль которой первоначально направлен луч:

$$\frac{dA}{dz}=-\frac{A}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-\boldsymbol{S}_\perp^2}}\left\{\frac{\boldsymbol{S}\nabla_{\boldsymbol{r}}\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}\right\}. \tag{16}$$

Очевидно, что выражение (16) также справедливо, если выполнено условие (10). Далее воспользуемся методом последовательных приближений, предполагая, что малым флуктуациям диэлектрической проницаемости (13) соответствуют малые флуктуации амплитуды и луча:

$$A=A_0+\alpha A_\alpha+O(\alpha^2),$$
$$\boldsymbol{r}_\perp=\boldsymbol{r}_{\perp 0}+\alpha\boldsymbol{r}_{\perp\alpha}+O(\alpha^2),$$
$$\boldsymbol{S}_\perp=\boldsymbol{S}_{\perp 0}+\alpha\boldsymbol{S}_{\perp\alpha}+O(\alpha^2).$$

Получим из (16) в нулевом и первом приближении по α уравнения для амплитуды

$$\frac{dA_0}{dz}=0,$$
$$\frac{dA_\alpha}{dz}=-\frac{A_0}{4\varepsilon_0}\left\{\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial z}+2\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}_{\perp\alpha}\right\}.$$

Умножая второе уравнение на α и складывая с первым, представим уравнение для амплитуды с точностью до $O(\alpha^2)$:

$$\frac{dA}{dz}=-\frac{\alpha A_0}{4\varepsilon_0}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial z}-\frac{A_0}{2}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}_\perp. \tag{17}$$

Выражение для $\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}_\perp$ получим из решения лучевых уравнений (15)

$$\boldsymbol{S}_\perp=\frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^z\nabla_{\boldsymbol{r}_\perp}\varepsilon_\alpha\,dz,$$

тогда

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}_\perp=\frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^z\left(\frac{\partial^2\varepsilon_\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_\alpha}{\partial y^2}\right)dz.$$

В результате динамическое уравнение для амплитуды имеет вид

$$\frac{dA}{dz}=-\frac{\alpha A_0}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial z}+\int\limits_0^z\left(\frac{\partial^2\varepsilon'_\alpha}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varepsilon'_\alpha}{\partial y'^2}\right)dz'\right\} \tag{18}$$

Уравнение (18) вместе с уравнениями (15) можно представить как систему уравнений типа уравнения Ланжевена, если ввести случайный пятимерный процесс $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\{x,y,S_x,S_y,A\}$ в соответствии с обозначениями (6). Далее следуем вышеописанной схеме перехода от динамического уравнения к уравнению Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятности решения $\boldsymbol{k}(z)$ системы (15), (18). Коэффициенты уравнения Эйнштейна–Фоккера для первых четырех координат случайного процесса $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}(x,y,S_x,S_y,A)$ уже были получены в [1,2]:

$$v_{S_x}=S_x,\quad v_{S_y}=S_y,\quad F_{S_x}=F_{S_y}=D=\frac{\sqrt{\pi}\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2r_0}, \tag{19}$$

где D — коэффициент диффузии луча при распространении в случайной в среднем однородной среде.

Остается вычислить коэффициенты, связанные с амплитудой.

В соответствии с (6) и (18) $v_A = 0$. Найдем коэффициент F_{AA} по формулам (8), (9):

$$F_{AA}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z) = \\ = \frac{\alpha^2 A_0^2}{4\varepsilon_0^2} \int_0^z \left\langle \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial z} + \int_0^z \left(\frac{\partial^2 \varepsilon'_\alpha}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon'_\alpha}{\partial y'^2} \right) dz' \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon'_\alpha}{\partial z'} + \int_0^{z'} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial y''^2} \right) dz'' \right] \right\rangle dz'. \quad (20)$$

Представим (20) в виде суммы интегралов:

$$F_{AA} = \frac{\alpha^2 A_0^2}{4\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{4} I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4 \right).$$

Дадим определения и вычислим эти интегралы.

$$I_1 = \int_0^z \left\langle \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon'_\alpha}{\partial z'} \right\rangle dz' = \left\langle \varepsilon_\alpha^2 \right\rangle \int_0^z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial z'} dz',$$

где

$$\rho(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{\overline{\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r})\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}')}}{\overline{\varepsilon_\alpha^2}}$$

— функция корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости. Предполагая далее, что неоднородности изомерны и $\rho = \rho(r^2) = \rho\big((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\big)$ [5], вычислим соответствующие производные

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial z'} = -4 \frac{d^2 \rho}{d(r^2)^2}(z - z')^2 - 2\frac{d\rho}{dr^2}.$$

Пусть функция корреляции имеет вид гауссоиды

$$\rho = e^{-r^2/r_0^2},$$

r_0 — определяет радиус корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости. Тогда

$$I_1 = 2\overline{\varepsilon_\alpha^2} \left(-\frac{4}{r_0^4} \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} r^2\, dr + \frac{2}{r_0^2} \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2}\, dr \right) = 0,$$

поскольку вычислять коэффициенты уравнения Эйншейна–Фоккера следует в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, где $x = x'$, $y = y'$.

Рассмотрим теперь интеграл I_2

$$I_2 = \int_0^z \left\langle \left(\frac{\partial \varepsilon'_\alpha}{\partial z'} \int_0^z \frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial x''^2} dz'' \right) dz' \right\rangle.$$

Вводя относительные координаты $x' - x'' = x$, $y' - y'' = y$, $z' - z'' = z$ и координаты центра тяжести $\frac{1}{2}(x' + x'') = x_0$, $\frac{1}{2}(y' + y'') = y_0$, $\frac{1}{2}(z' + z'') = z_0$, получим

$$I_2 = \overline{\varepsilon_\alpha^2} \int_0^z dz_0 2 \int_0^\infty \frac{\partial^3 \rho}{\partial z \partial x^2} dz.$$

В выбранных переменных $\rho = \rho(x^2 + y^2 + z^2)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial z}(x = y = 0) = 4e^{-r^2/r_0^2} \frac{r}{r_0^4}.$$

В результате

$$I_2 = 4\overline{\varepsilon_\alpha^2} \frac{z}{r_0^2}.$$

Интеграл I_3 имеет вид

$$I_3 = \int_0^z dz' \left\langle \int_0^z \frac{\partial^2 \varepsilon'_\alpha}{\partial x'^2} \int_0^{z'} \frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial x''^2} dz'\, dz'' \right\rangle = \\ = \overline{\varepsilon_\alpha^2} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz_0 \cdot 2 \int_0^\infty \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} dr.$$

Поскольку $\frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4}(x = y = 0) = 12e^{-r^2/r_0^2} \frac{1}{r_0^4}$, то

$$I_3 = \frac{12z^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{r_0^4} \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2}\, dr = 6\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}\frac{z^2}{r_0^3}.$$

Последний интеграл

$$I_4 = \left\langle \int_0^z dz' \int_0^z \frac{\partial^2 \varepsilon'_\alpha}{\partial x'^2} \int_0^{z'} \frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial y''^2} dz'\, dz'' \right\rangle$$

вычислим, производя те же операции, что и при вычислении двух предыдущих:

$$I_4 = \overline{\varepsilon_\alpha^2} \int_0^z z\, dz \cdot 2 \left(\int_0^\infty \frac{\partial^4 \rho}{\partial^2 x \partial^2 y} dr \right)_{x=y=0} = \\ = \overline{\varepsilon_\alpha^2} z^2 \frac{4}{r_0^4} \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2}\, dr = 2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}\frac{z^2}{r_0^3}.$$

Таким образом, коэффициент F_{AA} удовлетворяет следующему выражению:

$$F_{AA} = \frac{2\alpha^2 A_0^2 \overline{\varepsilon_\alpha^2}}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{z}{r_0^2} + 2\sqrt{\pi}\frac{z^2}{r_0^3} \right) = \\ = \frac{2\alpha^2 A_0^2 \overline{\varepsilon_\alpha^2}}{\varepsilon_0^2 r_0} \left[\frac{z}{r_0} + 2\sqrt{\pi} \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 \right].$$

Поскольку должно быть выполнено условие (12), то первым членом в квадратных скобках можно пренебречь. В итоге получим

$$F_{AA} = \frac{\alpha^2 \overline{\varepsilon_\alpha^2} \sqrt{\pi}}{\varepsilon_0^2 r_0} \cdot 4A_0^2 \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 = D_A,$$

или $D_A = DA_0^2 \cdot 16(z/r_0)^2$, т. е. диффузия амплитуды значительно больше, чем диффузия направления луча (16).

Нетрудно показать на примере вычисления

$$F_{AS_x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z) = \left\langle \int\limits_0^z -\frac{\alpha^2 A_0}{4\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon'_\alpha}{\partial z'} + \int\limits_0^{z'} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon''_\alpha}{\partial y''^2} \right) dz'' \right] dz' \right\rangle,$$

что коэффициенты уравнения Эйнштейна–Фоккера $F_{AS_x} = F_{AS_y} = 0$, поскольку соответствующие производные

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial z'} \right)_{x=x',\, y=y'} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial^2 x_i \partial x_j} \right)_{x_i = x_j = 0} = 0,$$

где $x_i, x_j = x, y$.

Таким образом, уравнение Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятности решения системы (15), (18) с учетом (19) имеет вид

$$\frac{\partial P_z(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{S}_\perp, A, z)}{\partial z} + \boldsymbol{S}_\perp \nabla_{\boldsymbol{r}_\perp} P_z = D \Delta_{\boldsymbol{S}_\perp} P_z + D_A \frac{\partial^2 P_z}{\partial A^2} \tag{21}$$

с начальными условиями

$$P_{z=0}(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{S}_\perp, A) = \delta(\boldsymbol{r}_\perp)\, \delta(\boldsymbol{S}_\perp)\, \delta(A - A_0).$$

Для решения уравнения (21) воспользуемся методом разделения переменных и представим решение в виде $P_z(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{S}_\perp, A) = V(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{S}_\perp) U(A)$. Тогда $V(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{S}_\perp)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \boldsymbol{S}_\perp \nabla_{\boldsymbol{r}_\perp} V = D \Delta_{\boldsymbol{S}_\perp} V, \quad V(z=0) = \delta(\boldsymbol{r}_\perp) \delta(\boldsymbol{S}_\perp),$$

решение которого при выбранных начальных условиях хорошо известно [6, 1]:

$$V(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{S}_\perp) =$$
$$= \frac{3}{4\pi^2 D^2 z^4} \exp\left\{ -\frac{1}{D} \left[\frac{\boldsymbol{S}_\perp^2}{z} - \frac{3 \boldsymbol{S}_\perp \boldsymbol{r}_\perp}{z^2} + \frac{3 \boldsymbol{r}_\perp^2}{z^3} \right] \right\}. \tag{22}$$

Очевидно, что $U(A)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = D_A \frac{\partial^2 U}{\partial A^2}, \quad U(z=0) = \delta(A - A_0), \tag{23}$$

где $D_A = D_A(z) = 16 D A_0^2 (z/r_0)^2$.

Решение уравнения (23) получено в работе [7]:

$$U(A) = \frac{1}{\left[4\pi \int\limits_0^z 16 D A_0^2 \left(\frac{z}{r_0}\right)^2 dz \right]^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{(A - A_0)^2}{4 \int\limits_0^z 16 D A_0^2 \left(\frac{z}{r_0}\right)^2 dz} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\left[64\pi D^* A_0^2 \left(\frac{z}{r_0}\right)^3 \right]^{1/2}} \exp\left(-\frac{3(A - A_0)^2}{64 D^* A_0^2 \left(\frac{z}{r_0}\right)^3} \right), \tag{24}$$

где $D^* = D r_0 = \sqrt{\pi}\, \alpha^2 \overline{\varepsilon_\alpha^2} / (4\varepsilon_0^2)$.

Итак, получен совместный закон распределения флуктуаций луча и амплитуды вдоль луча. Флуктуации амплитуды не зависят от флуктуаций положения и направления луча. Дисперсия амплитудных флуктуаций равна

$$\overline{(A - A_0)^2} = \frac{32}{3} D^* A_0^2 \left(\frac{z}{r_0} \right)^3.$$

Поведение дисперсии амплитуды определяется отношением $(z/r_0)^3$. Поскольку для перехода от динамических уравнений к уравнению Эйнштейна–Фоккера необходимо выполнение ограничений (10), (12), то из решения (22) следует, что флуктуации положения луча ограничены пройденным расстоянием гораздо слабее флуктуаций направления [1], а именно

$$\overline{r_\perp^2} \ll z^2.$$

Дисперсия амплитудных флуктуаций, как следует из решения (24), ограничена, очевидно, еще более слабым условием

$$\overline{(A - A_0)^2} \ll \frac{z^2}{r_0^2}.$$

Заметим, что выражения для дисперсии флуктуаций амплитуды в приближении геометрической оптики получены другими методами в работах [4, 5] и имеют тот же характер зависимости от величины z/r_0, что и в настоящей работе. Укажем также, что в [8] величина дисперсии амплитудных флуктуаций пропорциональна первой степени z/r, что существенно отличается от приведенных выше результатов.

Литература

1. *Кляцкин В.И., Татарский В.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. **14**, № 5. С. 707.
2. *Власова О.К.* Развитие метода диффузии луча и решение некоторых задач рассеяния. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. МГУ, физический факультет, 2004.
3. *Комиссаров В.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. **9**, № 2. С. 292.
4. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М., 1978.
5. *Чернов Л.А.* Волны в случайно-неоднородных средах. М., 1975.
6. *Фейнберг Е.Л.* Распространение волн вдоль земной поверхности. М., 1961.
7. *Чандрасекар С.* Стохастические процессы в физике и астрономии. М., 1947.
8. *Гусев В.Д., Куницын В.Е.* // Докл. РАН. 2000. **372**, № 4. С. 476.

Поступила в редакцию
25.11.05