

УДК 517.958:533.7

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСХОДА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В МИКРОКАНАЛЕ

Т. Г. Елизарова^{*)}, Д. Г. Ершов

(кафедра математики)

E-mail: telizar@afrodita.phys.msu.ru

Построены приближенные формулы для вычисления расхода газа в длинных изотермических микроканалах. Показано, что квазигазодинамические уравнения с условиями скольжения Максвелла предсказывают существование минимума расхода в канале — так называемого минимума Кнудсена. Предложены поправки, позволяющие выписать приближенные формулы для расхода, справедливые во всем диапазоне чисел Кнудсена.

Введение

Эксперименты Кнудсена, выполненные в начале 1900-х гг., показывают наличие минимума удельного расхода газа для течений в длинных изотермических каналах при числах Кнудсена порядка 0.2 (так называемый эффект, или минимум, Кнудсена) [1, 2]. Возможность описания этого эффекта с помощью различных теоретических моделей интересует исследователей и до сих пор. При использовании кинетических подходов эффект Кнудсена был получен в целом ряде работ. В частности, в [2–5] эта задача решалась с помощью вариационных подходов к решению уравнения Больцмана в БГК приближении и уравнений Барнетта.

В работе [6] было показано, что квазигидродинамические уравнения с граничными условиями скольжения Максвелла для скорости позволяют описать течения газа в микроканалах вплоть до чисел Кнудсена порядка единицы. В настоящей работе на основе указанного подхода построены приближенные аналитические формулы, описывающие эффект Кнудсена. Предложены поправки, позволяющие выписать приближенные формулы для расхода в плоских и цилиндрических каналах, справедливые во всем диапазоне чисел Кнудсена.

Уравнения газовой динамики и течение Пуазейля

Система уравнений газовой динамики может быть записана в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\mathbf{j}_m \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}). \quad (3)$$

Здесь использованы обычные обозначения. Символы \otimes и \cdot обозначают прямое тензорное и скалярное произведение соответственно. При вычислении дивергенции от диадного произведения $(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u})$ оператор div применяется к первому вектору. Индекс $()^T$ означает транспонирование.

Согласно [7, 8], различный выбор вектора плотности потока массы \mathbf{j}_m , тензора вязких напряжений Π и вектора теплового потока \mathbf{q} позволяет построить три взаимосвязанные системы уравнений. Для уравнений Навье–Стокса [10] эти величины вычисляются как

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{u}, \quad \mathbf{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \quad (4)$$

$$\Pi_{NS} = \eta [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \mathbf{u}].$$

Для двух других систем уравнений — квазигазодинамической и квазигидродинамической (КГД) [7–9] — вектор плотности потока массы определяется в виде

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}).$$

Для квазигазодинамической системы замыкающие соотношения имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p], \quad (5)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}] + \tau I [(\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (6)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} - \tau \rho \mathbf{u} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + p(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (7)$$

Характерное время τ и коэффициенты вязкости η и теплопроводности κ связаны между собой:

$$\tau = \frac{\eta}{Sc p}, \quad \kappa = \frac{\eta c_p}{Pr}, \quad (8)$$

где $\eta = \eta(T) = \eta_0 (T/T_0)^\omega$, Pr — число Прандтля, Sc — число Шмидта.

^{*)} Институт математического моделирования РАН.

Для квазигидродинамической системы уравнений

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_{NS} + \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}), \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_{NS}, \\ \mathbf{w} &= \frac{\tau}{\rho} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p]. \end{aligned} \quad (9)$$

Обе КГД системы отличаются от системы Навье–Стокса дополнительными слагаемыми с малым параметром размерности времени τ . Для стационарных течений дополнительные слагаемые имеют порядок $O(\tau^2)$.

Добавим к приведенным системам уравнений соотношения для идеального политропного газа $p = \rho RT$, $\varepsilon = c_v T$.

Для получения приближенной формулы массового расхода газа в длинном канале будем следовать методике работы [6]. Рассмотрим течение газа в плоском канале длины L и ширины H . Пусть на входе и выходе канала давление равно p_1 и p_2 , где $p_1 > p_2$. Следуя [10], предположим, что градиент давления вдоль канала невелик и на малой длине канала dx плотность газа ρ можно считать постоянной. Будем искать решение системы уравнений (1)–(3) в виде

$$u_x = u(y), \quad u_y = 0, \quad p = p(x), \quad T = T_0. \quad (10)$$

При этом все три выписанные системы уравнений сводятся к одному уравнению

$$\frac{dp(x)}{dx} = \eta_0 \frac{d^2 u(y)}{dy^2}. \quad (11)$$

Используя в качестве граничных условия скольжения Максвелла для скорости [11]

$$\left(u - \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{du}{dy}\right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left(u + \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{du}{dy}\right) \Big|_{y=H} = 0,$$

найдем профиль скорости, который имеет вид модифицированной параболы Пуазейля

$$u_x = -\frac{1}{2\eta_0} \frac{dp(x)}{dx} \left[y(H - y) + \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda H \right].$$

Здесь σ — коэффициент аккомодации для скорости, λ — средняя длина свободного пробега частиц, которая связана с коэффициентом вязкости:

$$\lambda = A \frac{\eta}{\rho} \sqrt{RT}, \quad (12)$$

где $A = \sqrt{\pi/2}$ (формула Чепмена [11]) или $A = 2(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)/(15\sqrt{2\pi})$ (формула Берда [12]).

Вычисление массового расхода

Для уравнений Навье–Стокса плотность потока массы $j_{mx} = \rho u_x$. Следуя методике работы [10], осуществим замену $\rho = p/RT_0$. Тогда массовый расход

газа, протекающего через некоторое сечение канала, вычисляется как

$$\begin{aligned} J_{NS} &= \int_0^H j_{mx} dy = \int_0^H \rho u_x dy = \\ &= -\frac{H^3}{8\eta_0 RT_0} \left[\frac{2}{3} p \frac{dp}{dx} + 4 \frac{2 - \sigma}{\sigma} p \frac{dp}{dx} \frac{\lambda}{H} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для обеих КГД моделей $j_{mx} = \rho(u_x - w_x)$, причем для рассматриваемой задачи величина w_x для обеих моделей одинакова и равна

$$w_x = -\frac{\tau dp}{\rho dx} = -\frac{\eta}{\rho Sc} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

В рамках КГД подхода расход газа через сечение канала равен

$$\begin{aligned} J &= \int_0^H \rho(u_x - w_x) dy = \int_0^H \rho u_x dy - \frac{\eta}{Sc} \int_0^H \frac{1}{p} \frac{dp(x)}{dx} dy = \\ &= -\frac{H^3}{8\eta_0 RT_0} \left[\frac{2}{3} p \frac{dp}{dx} + 4 \frac{2 - \sigma}{\sigma} p \frac{dp}{dx} \frac{\lambda}{H} + \frac{8}{A^2 Sc} p \frac{dp}{dx} \left(\frac{\lambda}{H}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее слагаемое в этой формуле получено с использованием замены коэффициента вязкости на длину свободного пробега по формуле (12).

Первое слагаемое в формуле (14) соответствует расходу, определяемому параболой Пуазейля с условиями прилипания, второе описывает увеличение расхода за счет условий скольжения скорости, третье увеличивает расход за счет процессов самодиффузии. Третье слагаемое имеет порядок $O(\tau^2)$ или $O(\text{Kn}^2)$, где число Кнудсена $\text{Kn} = \lambda/H$. Для стационарных течений именно такое отличие существует между уравнениями Навье–Стокса и КГД моделями.

Согласно [1], массовый расход в плоском канале для свободномолекулярного течения равен

$$J_0^{xy} = \frac{4H^2 \sqrt{2}}{3\sqrt{\pi RT_0}} \frac{dp}{dx}. \quad (15)$$

Выражая коэффициент вязкости через длину свободного пробега (12), вычислим нормированное значение расхода (14)

$$Q_{xy} = \frac{J}{J_0^{xy}} = \frac{3\sqrt{\pi} A}{8\sqrt{2}} \left[\frac{\text{Kn}^{-1}}{6} + \frac{2 - \sigma}{\sigma} + \frac{2}{A^2 Sc} \text{Kn} \right]. \quad (16)$$

Отсюда следует, что величина Q имеет минимум при числе Кнудсена

$$\text{Kn}_m = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{Sc}{3}}.$$

Положение минимума не зависит от коэффициента аккомодации σ . При $Sc = 1$, $A = \sqrt{\pi/2}$, $\text{Kn}_m = 0.36$.

В работе [2] на основе БГК приближения для молекул — твердых сфер ($\omega = 0.5$) вычислен рас-

ход в плоском канале. Результаты не выражаются аналитически и представлены в виде таблиц и графиков. Для малых чисел Kn ($Kn \rightarrow 0$) приведена приближенная формула для расхода в виде

$$Q_{сер} = \frac{Kn^{-1}}{6} + \sigma + (2\sigma^2 - 1)Kn. \quad (17)$$

При $\sigma = 1$ выражения (16) и (17) отличаются численным коэффициентом порядка единицы.

Вычисление расхода для разреженных течений

Присутствующие в КГД уравнения добавки, пропорциональные малому параметру τ , связаны с дополнительным осреднением, или сглаживанием, по времени при определении газодинамических параметров. Величина τ с точностью до коэффициента порядка единицы равна среднему времени свободного пробега частиц. При увеличении разреженности газа величина τ неограниченно возрастает. Для течений достаточно разреженных газов, когда $\lambda \geq H$, т.е. $Kn = \lambda/H \geq 1$, естественно ограничить время осреднения и связать его дополнительно с характерным размером задачи. Для этого в выражение для τ (8) введем поправку вида

$$\tau = \frac{\eta}{\rho Sc(1 + Kn)}. \quad (18)$$

При $Kn \rightarrow 0$ выражение (18) вырождается в (8). Учитывая выражение для λ вида (12), получим, что при больших числах Кнудсена ($Kn \gg 1$)

$$\tau = \frac{\eta}{\rho Sc(1 + Kn)} \sim \frac{\eta}{\rho Sc Kn} = \frac{H}{Sc A \sqrt{RT}}. \quad (19)$$

Таким образом, для разреженных течений $\tau \sim H/\sqrt{RT}$ имеет порядок характерного времени свободного пробега молекул между столкновениями с границами рассматриваемой области.

Используем модифицированную формулу для τ при вычислении расхода в канале. В выражение (18) введем калибровочный коэффициент $\alpha \sim 1$: $\tau = \eta/(\rho Sc(1 + \alpha Kn))$. Тогда формула для локального расхода в сечении плоского канала (14) примет вид

$$J = -\frac{H^3}{8\eta_0 RT_0} \left[\frac{2}{3} p \frac{dp}{dx} + 4 \frac{2 - \sigma}{\sigma} p \frac{dp}{dx} \frac{\lambda}{H} + \frac{8}{A^2 Sc} p \frac{dp}{dx} \left(\frac{\lambda}{H} \right)^2 \frac{1}{(1 + \alpha \lambda/H)} \right], \quad (20)$$

нормированное значение расхода (аналог формулы (16))

$$Q_{xy} = \frac{J}{J_0^{xy}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{A}{\sqrt{2}} \left[\frac{Kn^{-1}}{6} + \frac{2 - \sigma}{\sigma} + \frac{2}{A^2 Sc} \frac{Kn}{(1 + \alpha Kn)} \right]. \quad (21)$$

Нормированный расход имеет минимум при числе Кнудсена

$$Kn_m = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{Sc}{3}} \left(1 - \alpha \frac{A}{2} \sqrt{\frac{Sc}{3}} \right)^{-1},$$

где Kn_m определяется как положительный корень соответствующего квадратного уравнения. При $Sc = 1$, $A = \sqrt{\pi/2}$, $\alpha = 1$, величина $Kn_m = 0.56$. Условие существования минимума Кнудсена $Kn_m > 0$ накладывает ограничение на величину α :

$$\alpha < \frac{A\sqrt{Sc}}{2\sqrt{3}} \sim 3.$$

При $Kn \gg 1$ расход в канале будет равен расходу при свободномолекулярном течении и выражение (21) примет вид

$$Q_{xy} = \frac{J}{J_0^{xy}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{A}{\sqrt{2}} \left[\frac{2 - \sigma}{\sigma} + \frac{2}{\alpha A^2 Sc} \right] = 1. \quad (22)$$

Отсюда можно определить величину коэффициента α . При $\sigma = 1$

$$\alpha = \frac{6\sqrt{\pi}}{A Sc (8\sqrt{2} - 3A\sqrt{\pi})}.$$

Если $A = \sqrt{\pi/2}$, $Sc = 1$, то $\alpha = 1.82$.

Аналогично удастся получить нормированное значение расхода для цилиндрического канала радиуса H :

$$Q_{rz} = \frac{J}{J_0^{rz}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{A}{\sqrt{2}} \left[\frac{Kn^{-1}}{4} + \frac{2 - \sigma}{\sigma} + \frac{2}{A^2 Sc} \frac{Kn}{(1 + \alpha Kn)} \right], \quad (23)$$

где массовый расход для свободномолекулярного течения [1]

$$J_0^{rz} = \frac{4H^3}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{RT_0}} \frac{dp}{dz}.$$

Нормированный расход имеет минимум при числе Кнудсена

$$Kn_m = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{Sc}{2}} \left(1 - \alpha \frac{A}{2} \sqrt{\frac{Sc}{2}} \right)^{-1}.$$

Сопоставление выражений (21) и (23) с результатами [2] приведено на рис. 1 и 2 для $\sigma = 1$, $A = \sqrt{\pi/2}$, $Sc = 1$. Нижняя кривая соответствует уравнениям Навье–Стокса с условием прилипания для скорости, кривая 1 — уравнениям Навье–Стокса с условиями скольжения для скорости, 2 — КГД модели для $\alpha = 0$, 3 — $\alpha = 1$, пунктирная линия (Сер) — данные [2]. На рис. 2 кривая 4 соответствует $\alpha = 2$.

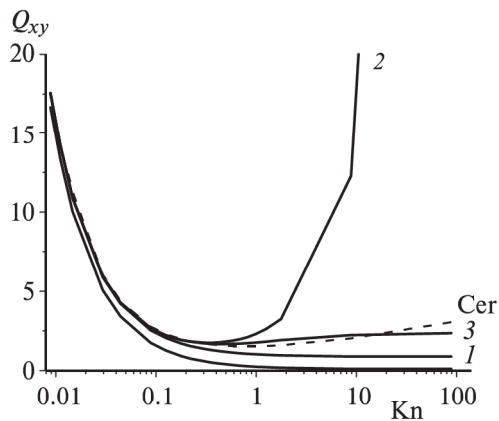


Рис. 1. Зависимость удельного расхода Q_{xy} от числа Кн в плоском канале

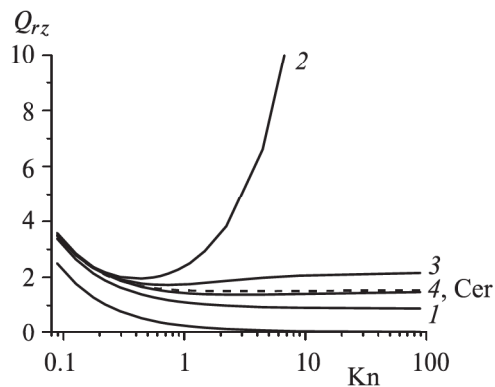


Рис. 2. Зависимость удельного расхода Q_{rz} от числа Кн в цилиндрическом канале

Таким образом, показано, что полученная в рамках КГД уравнений формула для расхода газа в длинных каналах предсказывает эффект Кнудсе-

на. Введение поправки в параметр релаксации позволяет получить выражение для расхода в длинных изотермических каналах, которое хорошо совпадает с результатами кинетической теории во всем диапазоне чисел Кнудсена.

Литература

1. Present R.D. Kinetic theory of gases. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978.
3. Cercigniani C., Sernagiotto F. // Phys. Fluids. 1966. **9**, N 1. P. 40.
4. Cercigniani C., Lampis M., Lorenzani S. // Phys. Fluids. 2004. **16**, N 9. P. 3426.
5. Kun Xu, Zhihui Li. // J. Fluid Mech. 2004. **513**. P. 87.
6. Elizarova T.G., Sheretov Yu.V. // La Houille Blanche. Revue Internationale de l'Eau. 2003. N 5. P. 66.
7. Шеретов Ю.В. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1997. С. 127.
8. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.
9. Елизарова Т.Г. Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. Ч. 1, 2. М., 2005.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.
11. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., 1991.
12. Bird G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford, 1994.

Поступила в редакцию
01.03.06