УДК 519.634

ОБ ОДНОМ ВОЗМОЖНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

М. Д. Малых
(*кафедра математики*)
E-mail: malykham@mtu-net.ru

Введено понятие ко-пучка пространств Соболева, обобщающее понятие пространства Соболева, доказано обобщение теоремы Реллиха–Фридрихса, под которое подпадают операторы краевых задач в неограниченных областях и, в частности, волноводах.

Ряд проблем, возникающих при рассмотрении краевых задач акустики и электродинамики, можно представить в новом свете, если систематически изучить проникновение топологии области n-мерного евклидова пространства, в котором рассматривается задача, в топологию соответствующего пространства Соболева. В качестве примеров проникновения одной топологии в другую можно указать теорию узловых линий Куранта [1], теорию множеств закрепления, развитую А. А. Самарским [2], теоремы о существенном спектре [3–6] или наши исследования о распространении понятия обобщенного решения задачи Дирихле на решения, не принадлежащие L^2 [7].

1. Ко-пучок гильбертовых пространств

При введении пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ его элементы перестают быть функцией на X, иными словами, забывается топология пространства X, но при этом между объектами, имеющими смысл в топологии $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, и объектами, имеющими смысл в топологии $\mathbb{R}^n$, существует ускользающая при таком подходе связь.

Для того чтобы сохранить топологию X, рассмотрим правило, по которому каждому открытому множеству U в $X \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(U)$, причем для определенности $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\varnothing) = 0$. Эту конструкцию будем называть *ко-пучком пространств Соболева* $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(X)$ на топологическом пространстве $X \subset \mathbb{R}^n$.

На языке теории категории [8] это можно выразить так: пусть $\mathfrak{Top}\,X$ — категория, объектами которой являются открытые множества в X, а стрелками — вложения, тогда предпучок — *контр*вариантный функтор из $\mathfrak{Top}\,X$ в категорию $\mathfrak{Ab}$ абелевых групп. В нашем случае можно сказать, что ко-пучок Соболева — это *ко*вариантный функтор из $\mathfrak{Top}\,X$ в категорию $\mathfrak{Ab}$ абелевых групп, чем и объясняется приставка «ко». При этом, конечно, последнюю категорию можно уменьшить до категории подпространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, в которой стрелками опять являются вложения. Эта аналогия позволит дальше использовать некоторые конструкции из алгебраической геометрии.

Отметим, что указанное соответствие корректно определено для любой области U, даже с негладкой границей. В самом деле, множество $C_0^\infty(U)$ вложено в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, поэтому норма и скалярное произведение W_2^1 вполне определены на этом множестве как обычные римановы интегралы по области в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, предгильбертово пространство $C_0^\infty(U)$ можно замкнуть по норме и получить $\overset{\circ}{W}{}_2^1(U)$. Точно так же, как исследование разрешимости задачи Дирихле на компакте X опирается на теорию компактных операторов в гильбертовых пространствах, исследование в случае произвольной области X опирается на теорию операторов в ко-пучках гильбертовых пространств. Последние понимаются так.

Определение 1. Скажем, что на топологическом пространстве X задан ко-пучок гильбертовых пространств $\mathcal{H}(X)$, если каждому открытому множеству $U \subset X$ отвечает гильбертово пространство $\mathfrak{H}(U)$, причем

1) вложение $U \subset U'$ влечет $\mathfrak{H}(U) \subset \mathfrak{H}(U')$;
2) $\mathfrak{H}(\varnothing) = 0$;
3) конечному пересечению областей U_i отвечает

$$\mathfrak{H}(\cap U_i) = \bigcap \mathfrak{H}(U_i);$$

4) произвольному (быть может, несчетному) объединению областей U_α соответствует замыкание по норме $\mathfrak{H}$ линейного пространства, образованного всевозможными конечными суммами элементов из пространств $\mathfrak{H}(U_\alpha)$, т. е.

$$\mathfrak{H}(\cup U_\alpha) = \overline{\sum \mathfrak{H}(U_\alpha)}.$$

В качестве гильбертова пространства, индуцированного на замкнутом множестве Z, примем ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}(X - Z)$, т. е.

$$\mathfrak{H}(Z) := \mathfrak{H}(X - Z)^T.$$

2. Операторы, компактные на множестве в X

Теперь можно ввести новый класс операторов, занимающий промежуточное положение между компактными и ограниченными операторами в $\mathfrak{H}(X)$. Оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}(X))$ назовем *компактным на открытом или замкнутом множестве* $Y \subseteq X$, если этот оператор переводит любую последовательность $v_n \in \mathfrak{H}(Y)$, ограниченную по норме $\mathfrak{H}$, в компактную, т. е.

$$v_n \in \mathfrak{H}(Y),\ ||v_n|| \leqslant C \Rightarrow Av_{n_k} \text{ сходится по норме } \mathfrak{H}. \quad (1)$$

Аналогично квадратичная форма $a(v)$ называется компактной на Y, если верно

$$v_n \in \mathfrak{H}(Y), \quad v_n \rightharpoonup v \quad \Rightarrow \quad a(v_n) \to a(v). \quad (2)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Самосопряженный, ограниченный, положительно определенный и вещественный оператор A является компактным на Y, если квадратичная форма (v, Av) компактна на Y.*

Доказательство. Обозначим спектральное семейство самосопряженного ограниченного оператора A как $E(\lambda)$ [9, с. 341]. Тогда при сделанных предположениях оператор

$$\sqrt{A} = \int\limits_0^{||A||} \sqrt{\lambda} dE(\lambda)$$

будет самосопряженным. Поэтому

$$||\sqrt{A}v||^2 = (v, Av),$$

и компактность квадратичной формы (v, Av) на Y влечет компактность $\sqrt{A}$. Но тогда и оператор $A = \sqrt{A}\sqrt{A}$ компактен на Y.

Теоремы (6) и (9) из [10, с. 35], восходящие к Эрлингу, позволяют сформулировать следующий критерий локальной компактности квадратичной формы.

Квадратичная форма a на $\mathfrak{H}$ компактна на Y, если для любого числа $\epsilon \in (0, 1]$ существует такая окрестность U_x и компактная квадратичная форма a_ϵ на $\mathfrak{H}(Y)$, что

$$|a(v)| \leqslant \epsilon ||v||^2 + |a_\epsilon(v)|, \quad v \in \mathfrak{H}(Y). \quad (3)$$

Наоборот, если a — компактная на Y квадратичная форма, а b — компактная симметричная, строго положительная квадратичная форма на $\mathfrak{H}(Y)$, то для любого положительного числа $\epsilon > 0$ найдется такое положительное число $\kappa(\epsilon)$, что справедливо неравенство

$$|a(v)| \leqslant \epsilon ||v||^2 + \kappa(\epsilon) b(v), \quad v \in \mathfrak{H}(Y). \quad (4)$$

3. Обобщение теоремы Реллиха–Фридрихса

Рассмотрение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ задачи Дирихле об отыскании функции v, удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda q v = f & \text{в } X, \\ v|_{\partial X} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где q и f — данные функции, а λ — данное число, в некомпактной области X осложнено тем, что билинейная форма

$$\int\limits_X q(x)\, dx\, w^* v$$

порождает ограниченный, но не компактный оператор. Используя введенные выше понятия, можно утверждать следующее.

Теорема 2 (обобщение теоремы Реллиха–Фридрихса). *Оператор A, порожденный билинейной формой*

$$(w, Av)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)} = \int\limits_X q(x)\, dx\, w^* v,$$

где $q(x)$ — кусочно-непрерывная комплекснозначная функция, абсолютное значение которой ограничено сверху, является компактным на любом компактном множестве.

Доказательство. Заметим, что комплекснозначная функция q может быть представлена в виде суммы

$$q(x) = q_1(x) - q_2(x) + iq_3(x) - iq_4(x),$$

где $q_n(x)$ — кусочно-непрерывные неотрицательные функции. Каждая из них порождает неотрицательно определенные операторы A_n, к которым можно применить предыдущий критерий компактности. Поскольку $A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4$, все сводится к случаю неотрицательно определенной q, положительной на компакте Y.

В силу теоремы Реллиха квадратичная форма, соответствующая оператору A, компактна на любом множестве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(U)$, где U — открытый компакт в $X \subset \mathbb{R}^n$.

Бóльшие трудности доставляет случай, когда рассматриваемый компакт Y замкнут. Пусть $\{v_n\}$ — слабо сходящаяся к нулю относительно скалярного произведения элементов пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Y)$, а следовательно, и ограниченная последовательность элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Y)$:

$$||v_n||_{W_2^1} \leqslant C.$$

Существует открытая компактная область U с гладкой границей, содержащая целиком Y, поэтому можно воспользоваться разбиением единицы, а именно взять две гладкие функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$\psi(x) + \varphi(x) = 1, \quad \psi|_Y = 1, \quad \operatorname{supp} \psi \subset U.$$

Тогда
$$v_n = \psi v_n + \varphi v_n, \quad \psi v_n \in \mathring{W}_2^1(U),$$
при этом
$$||\psi v_n||_{W_2^1} \leqslant C',$$
поскольку $\psi \in C_0^\infty(U)$. Раз U — компакт, то из $\{A\psi v_n\}$ можно выделить сходящуюся к некоторому элементу u по норме W_2^1 подпоследовательность
$$A\psi v_{n_k} \to u.$$
Но, с другой стороны,
$$(w, A\psi v) = \int\limits_X q(x)\, dx\, w\psi v = (\psi w, Av),$$
и в силу $v_n \rightharpoonup 0$ верно
$$(w, A\psi v_{n_k}) = (A\psi w, v_{n_k}) \to 0.$$
Поэтому $(w, A\psi v_{n_k} - u)$ стремится к $-(w, u)$ и к нулю одновременно. В силу положительной определенности A
$$A\psi v_{n_k} \to 0$$
в норме $\mathring{W}_2^1(X)$.

Положим теперь
$$w_k := \varphi v_{n_k}, \quad f_k := \Delta w_k$$
и докажем, что эти последовательности ограничены. Первая последовательность w_k есть разность ограниченных по норме W_2^1 последовательностей v_{n_k} и ψv_{n_k}. Относительно второй заметим, что $v_n \in \mathring{W}_2^1(Y)$ влечет
$$\Delta v_n = 0, \quad x \in X - Y,$$
поэтому
$$f_k = \Delta w_k = \Delta(\varphi v_{n_k}) = v_{n_k}\Delta\varphi + (\nabla v_{n_k}, \nabla\varphi)$$
при всех $x \in X$. Поскольку функция $\psi \in C_0^\infty(U)$ и функция φ меняется лишь в некоторой компактной области U, то и $f_k \in L^2(U)$ равномерно ограниченна: $||f_k||_{L^2} \leqslant C'$.

В силу компактности вложения $W_2^1(U)$ в $L^2(U)$ из $\{w_k\}$ как последовательности элементов $W_2^1(U)$ можно извлечь последовательность, сходящуюся к некоторому элементу w в норме $L^2(U)$. В силу того что эта последовательность слабо сходится к нулю, сам элемент u равен нулю. Но тогда в силу
$$||w_k||^2_{W_2^1(X)} = |(w_k, f_k)_{L^2(U)}| \leqslant ||w_k||_{L^2(U)},$$
$$||f_n||_{L^2(U)} \leqslant C'||w_n||_{L^2(U)}$$
подпоследовательность w_{k_p} сходится к нулю и в норме $\mathring{W}_2^1(X)$.

Как указывает пример сужающейся трубы, рассмотренный в начале работы Реллиха [11], обратное неверно: существуют некомпактные области, на которых определенный таким образом оператор A не является компактным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00146).

Литература

1. *Гильберт Д., Курант Р.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1951; Т. 2. М., 1945.
2. *Самарский А.А.* // Докл. АН СССР. 1948. **63**, № 6. С. 631 (Избр. труды. М., 2003. С. 23–27).
3. *Бирман М.Н.* // Вестн. Ленингр. ун-та. 1962. № 1. С. 22.
4. *Wolf Fr.* // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wettenschappen. Proceedings. Ser. A. 1959. **62**, N 2. P. 142.
5. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
6. *Krejciric D., Kriz J.* // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University. 2005. **41**. P. 757.
7. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. 2005. № 4. С. 12 (Moscow University Phys. Bull. 2005. N 4. P. 13).
8. *Манин Ю.И.* Лекции по алгебарической геометрии. Ч. 1. Аффинные схемы. М., 1970.
9. *Рисс Ф., С.-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
10. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1969.
11. *Rellich Fr.* Studies and Essays Presented to R. Courant. N. Y., 1948. P. 329.

Поступила в редакцию
15.03.06