УДК 519.634

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ДЖОНСА

М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Рассмотрена связь между топологией области, в которой поставлена краевая задача для уравнения $\Delta v+\lambda v=f$, и топологией соответствующего пространства Соболева. Дано обобщение теоремы Джонса в направлении ее сближения с теоремой Вейля–фон Неймана.

Ряд проблем, возникающих при рассмотрении краевых задач в некомпактных областях, связан со следующим обстоятельством. Исследовать разрешимость скалярной задачи в компактной области удается легко благодаря введению пространства Соболева. При введении понятия обобщенного решения последнее перестает быть функцией на X, иными словами, забывается топология пространства X, но при этом между объектами, имеющими смысл в топологии $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, и объектами, имеющими смысл в топологии $\mathbb{R}^n$, имеется ускользающая при таком подходе связь.

Обратимся к важнейшему результату теории волноводов и рупоров — теореме Джонса [1] о существенном спектре.

Рассмотрим задачу Дирихле об отыскании функции v, удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases}\Delta v+\lambda q v=f \quad \text{в} \quad X,\\ v|_{\partial X}=0\end{cases} \tag{1}$$

при данных области X евклидова n-мерного пространства, вещественной кусочно-непрерывной функции q, равной единице вне некоторого компакта, и вещественного или комплексного числа λ. В пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ эту задачу можно записать так:

$$v-\lambda A v=Hf,$$

где A и H — ограниченные операторы, порожденные билинейными формами

$$\int\limits_X q(x)dx\, vw^* \quad \text{и} \quad \int\limits_X dx\, vw^*$$

соответственно.

Из нескольких почти всегда эквивалентных определений спектральных характеристик оператора примем следующие. Резольвента $R(A,\lambda)= =(E-\lambda A)^{-1}$ ограниченного оператора A является голоморфной оператор-функцией в некоторой открытой области плоскости λ, совокупность всех особых точек называют спектром A и пишут $\sigma(A)$; спектром задачи Дирихле называют спектр соответствующего оператора A. При этом если оператор A самосопряженный, то $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$. Среди особых точек резольвенты выделим полюса: особая точка $\lambda=\lambda_0$ называется полюсом резольвенты, если в некоторой проколотой окрестности этой точки резольвента представима в виде

$$(E-\lambda A)^{-1}=$$
$$=P_N(\lambda-\lambda_0)^{-N}+\ldots+P_1(\lambda-\lambda_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(\lambda-\lambda_0)^n,$$

где P_n — некоторые конечномерные операторы, а Q_n — некоторые ограниченные операторы. При этом, как обычно, N называют порядком полюса, а P_1 — вычетом. Прочие особенности называют существенными, а их совокупность — существенным спектром и обозначают как $\sigma_{\text{ess}}(A)$.

Теорему Джонса можно сформулировать так: *две задачи вида* (1), *рассматриваемые соответственно в областях $X=X_1$ и $X=X_2$, имеют один и тот же существенный спектр, если области X_1 и X_2 совпадают вне некоторого компакта и X_1 — конус или цилиндр.* Ниже мы докажем ее обобщение.

Теорема 1 (обобщение теоремы Джонса). *Существенные спектры операторов, порожденных билинейными формами*

$$\int\limits_{X_1} q(x)\,dx\, vw^* \quad \text{и} \quad \int\limits_{X_2} q(x)dxvw^*$$

в $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(X_1)$ и $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(X_2)$ соответственно, совпадают, если сами области X_1 и X_2 совпадают вне некоторого компакта в $\mathbb{R}^n$ вне зависимости от формы самих областей.

Более развернуто. Пусть две области X_1 и X_2 принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$ и совпадают в области U, такой, что $Z_i=X_i-U$ — компактные замкнутые области. На каждом пространстве X_i задан ко-пучок $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(X_i)$ и оператор A_i как

$$(w,A_iv)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(X_i)}=\int\limits_{X_i}dxw^*v \quad \forall\ v,w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(X_i).$$

Отсюда ясно, что сужения этих операторов на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(U)$ совпадают. Обобщение теоремы Джонса утверждает, что

$$\sigma_{\text{ess}}(A_1) = \sigma_{\text{ess}}(A_2).$$

Эту теорему можно также рассматривать как вариант теоремы М. Ш. Бирмана [2], годный для областей с какой угодно границей. Последнее обстоятельство особенно важно для приложений, поскольку в радиофизике часто используются волноводы с негладкой, например гофрированной, границей. Обобщение теоремы Джонса имеет очень простой физический смысл: множество частот, при которых энергия распространяется по волноводу, не меняется при любых локальных изменениях волновода, будь то растяжения, введение антенн или уголков.

При таком прочтении теорема Джонса является развитием теоремы Г. Вейля и Дж. фон Неймана:

Теорема 2 (H. Weyl, J. von Neumann). *Для того чтобы существенные спектры двух ограниченных самосопряженных операторов $A_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1)$ и $A_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_2)$ совпадали:*

$$\sigma_{\text{ess}}(A_1) = \sigma_{\text{ess}}(A_2),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали компактный оператор K и унитарный $\mathfrak{U}$, такие, что

$$A_1 = \mathfrak{U}^* A_2 \mathfrak{U} + K. \tag{2}$$

Замечание 1. Первоначально это утверждение было установлено Вейлем [3] в одну сторону и состояло в том, что два оператора, разность которых является компактным оператором, имеют один и тот же существенный спектр. Сам Вейль, впрочем, в 1909 г. не мог сослаться на теорему Рисса и сформулировал этот результат в терминах спектральной теории билинейных форм. При нашем определении спектра указанное утверждение доказывается весьма просто. Из тождества

$$R(A_1,\lambda) - R(\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U},\lambda) = \\ = -\lambda R(A_1,\lambda)(A_1 - \mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U})R(\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U},\lambda)$$

тут же имеем

$$R(A_1,\lambda)\,[E + \lambda K R(\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U},\lambda)] = R(\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U},\lambda). \tag{3}$$

Поскольку при всех $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(A_2)$ оператор

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \lambda K R(\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U},\lambda)$$

является компактным оператором, имеющим разве только полюса, то в силу мероморфной теоремы Фредгольма оператор

$$[E + \lambda K R(\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U},\lambda)]^{-1}$$

тоже имеет только полюса и в силу (3) резольвента $R(A_1,\lambda)$ может иметь тоже только полюса, т. е.

$$\sigma_{\text{ess}}(A_1) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(A_2).$$

Меняя ролями A_1 и A_2, видим, что в этом соотношении возможно только равенство.

Обращение было установлено Дж. фон Нейманом [4] в 1939 г., затем в начале 1970-х гг. Халмош (P. R. Halmos) вновь привлек внимание к этой теореме и предложил перенести ее на нормальные операторы, что и было сделано одновременно несколькими авторами [5].

Используя понятие ко-пучка гильбертовых пространств и обобщение теоремы Реллиха–Фридрихса, данное в работе [6], можно доказать даже более общее утверждение, из которого обобщение теоремы Джонса получается тем же приемом, который используется при указанном доказательстве теоремы Вейля–фон Неймана.

Теорема 3. *Пусть X_1 и X_2 — произвольные топологические пространства, на которых заданы сепарабельные ко-пучки $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ и два ограниченных оператора A_1 и A_2 соответственно. Пусть, далее, в X_i имеется открытое множество U_i, такое, что*

1) *операторы A_i компактны на дополнения $Z_i = X_i - U_i$;*

2) *существует унитарный оператор*

$$\mathfrak{U}_1\colon\ \mathfrak{H}_1(U_1) \mapsto \mathfrak{H}_2(U_2),$$

переводящий сужение A_1 в A_2:

$$(w, \mathfrak{U}_1^* A_2 \mathfrak{U}_1 v) = (w, A_1 v) \quad \forall\ v, w \in \mathfrak{H}_1(U_1).$$

Тогда существует унитарный оператор $\mathfrak{U}$, отображающий $\mathfrak{H}_1(X_1)$ на $\mathfrak{H}_2(X_2)$, такой, что

$$K := A_1 - \mathfrak{U}^* A_2 \mathfrak{U}$$

— компактный оператор в $\mathfrak{H}_1(X_1)$ и $K\mathfrak{H}_1(U_1) = 0$.

Здесь ко-пучок называется сепарабельным, если $\mathfrak{H}(X)$ сепарабельно. Отметим, что в сепарабельном ко-пучке все $\mathfrak{H}(U)$ сепарабельны. В самом деле, если $\mathfrak{H}(X)$ сепарабельно, то в нем имеется счетное плотное множество $\mathfrak{V}$, его проекция на $\mathfrak{H}(U)$ даст счетное плотное множество в $\mathfrak{H}(U)$, а поэтому и это пространство сепарабельно [7].

Доказательство. Так как рассматриваемые ко-пучки сепарабельны, то гильбертовы пространства $\mathfrak{H}_i(Z_i)$ вложены в сепарабельные пространства $\mathfrak{H}(X_i)$, поэтому они сами сепарабельны, а стало быть, и изоморфны, т. е. существует унитарный оператор $\mathfrak{U}_2$, отображающий $\mathfrak{H}_1(Z_1)$ на $\mathfrak{H}_2(Z_2)$. Но тогда в силу

$$\mathfrak{H}_i(X_i) = \mathfrak{H}_i(U_i) \oplus \mathfrak{H}_i(Z_i) \quad (i = 1, 2)$$

и условия 2) теоремы существует унитарный оператор $\mathfrak{U}$, сужениями которого на прямые слагаемые будут как раз $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$.

По построению K — ограниченный оператор из $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1(X_1))$, и к тому же

$$K^* = A_1^* - (\mathfrak{U}^*A_2\mathfrak{U})^* = A_1^* - \mathfrak{U}^*A_2^*\mathfrak{U}.$$

Пусть $v_n \in \mathfrak{H}_1(X_1)$ — произвольная слабо сходящаяся к нулю последовательность

$$(w, v_n) \longrightarrow 0 \quad \forall\, w \in \mathfrak{H}_1(X_1).$$

Используя разложение $\mathfrak{H}_1(X_1) = \mathfrak{H}_1(U_1) \oplus \mathfrak{H}_1(Z_1)$, представим ее элементы в виде

$$v_n = v_n' + v_n'', \quad v_n' \in \mathfrak{H}_1(Z_1), \quad v_n'' \in \mathfrak{H}_1(U_1).$$

Покажем, что

$$v_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow K v_n' \to 0. \tag{4}$$

В самом деле, произвольный элемент $w \in \mathfrak{H}_1(X_1)$ тоже можно представить в виде

$$w = w' + w'', \quad w' \in \mathfrak{H}_1(Z_1), \quad w'' \in \mathfrak{H}_1(U_1),$$

поэтому в силу $\mathfrak{H}_1(U_1) \perp \mathfrak{H}_1(Z_1)$ верно

$$(w, v_n') = (w', v_n') = (w', v_n) \to 0,$$

т. е. $v_n' \rightharpoonup 0$. Вспомнив, что по условию теоремы A_1 компактен на Z_1, видим, что $A_1 v_n'$ сходится к нулю.

Аналогично поскольку оператор A_2 компактен на Z_2 и $\mathfrak{U} v_n' = \mathfrak{U}_2 v_n' \in \mathfrak{H}_2(Z_2)$, то $\mathfrak{U}^* A_2 \mathfrak{U} v_n'$ тоже сходится к нулю. Но тогда и $K v_n'$ сходится к нулю, что и доказывает (4).

Используя теперь равенство

$$(v'', Kv'') = (v'', A_1 v'') - (\mathfrak{U} v'', A_2 \mathfrak{U} v'') = \\ = (v'', A_1 v'') - (\mathfrak{U}_1 v'', A_2 \mathfrak{U}_1 v'') = 0,$$

имеем

$$(v_n, K v_n) = (v_n', K v_n') + 2(v_n'', K v_n').$$

Поскольку $v_n \rightharpoonup 0$ влечет сильную сходимость $K v_n'$ к нулю и ограниченность $\|v_n''\| \leqslant \|v_n\|$, верно

$$v_n \rightharpoonup 0 \quad \Rightarrow \quad (v_n, K v_n) \to 0,$$

что эквивалентно компактности K [8]. Тем самым теорема полностью доказана.

При исследовании разрешимости задачи Дирихле общая теорема 3 позволяет свободно двигать нижние границы непрерывного спектра и фактически позволяет свести исследование задачи Дирихле в сложной области к задаче Дирихле в области, которая допускает разделение переменных [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00146).

Литература

1. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
2. *Бирман М.Ш.* // Вестн. Ленингр. ун-та. 1962. № 1. С. 22.
3. *Weyl H.* // Rend. Circ. Matem. Palermo. 1909. **27**. P. 373.
4. *Neumann J.V.* // Actualités scientifiques et industrielles. 1935. **229**. P. 38.
5. *Berg I.D.* // Trans. AMS. 1971. **160**. P. 365.
6. *Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2007. № 1. С. 25 (Moscow University Phys. Bull. 2007. N 1).
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1, 4. М., 1982.
8. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Berlin; Heidelberg; N.Y., 1969.
9. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 5. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2005. N 5. P. 74).

Поступила в редакцию
15.03.06