

УДК 530.145

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЬ В УГОЛКОВЫХ ОТРАЖАТЕЛЯХ

С. П. Тарабрин

(кафедра физики колебаний)

E-mail: tarabrin@phys.msu.ru

Рассмотрен фундаментальный механизм потерь энергии гауссова пучка света в диэлектрическом уголковом отражателе при дифракционном рассеянии на его ребре. Сделан оригинальный расчет и получены оценки относительных потерь для различных поляризаций с учетом явления сдвига Гуса–Хэнхена. Для волны, поляризованной параллельно ребру уголкового отражателя, относительные потери при угле падения $\alpha = \pi/4$ равны $(W_{\text{diff}}/W_{\text{inc}})_E \simeq 7.03(\lambda_0/a)$, а для волны, поляризованной перпендикулярно ребру, $(W_{\text{diff}}/W_{\text{inc}})_H \simeq 3.82(\lambda_0/a)$, где λ_0 — длина волны в вакууме, a — эффективный радиус пучка.

Введение

В настоящее время чувствительность лазерной гравитационной антенны LIGO ограничена уровнем термодинамических шумов в диэлектрическом покрытии используемых зеркал, которые в работе [1] было предложено заменить на диэлектрические уголковые отражатели (рис. 1), свободные от этого недостатка.

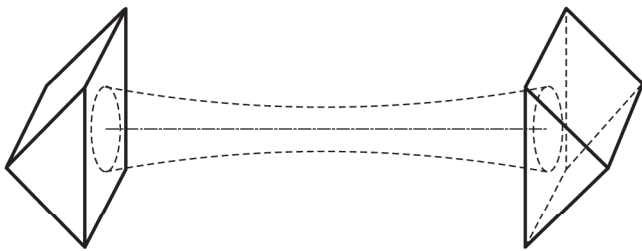


Рис. 1. Резонатор Фабри-Перо с уголковыми отражателями

В настоящей работе рассчитаны фундаментальные дифракционные потери гауссова пучка света на ребре двугранного диэлектрического уголкового отражателя (см. рис. 1), изготовленного из плавленного кварца с показателем преломления $n = 1.45 > \sqrt{2}$. Характерным параметром гауссова пучка является отношение $\lambda/a \ll 1$ длины волны к радиусу пучка. Известно [2], что для гауссова пучка, распространяющегося вдоль оси z , одна из поперечных компонент электрического поля может быть выбрана равной нулю (например, $E_y \equiv 0$). Тогда для компонент электрического и магнитного полей в пучке можно написать оценки

$$H_y \sim E_x, \quad E_z, H_z \sim \frac{\lambda}{a} E_x, \quad H_x \sim \frac{\lambda^2}{a^2} E_x.$$

В расчетах мы будем удерживать только «большую» компоненту E_x электрического поля, пренебрегая вкладом «малых» (по параметру λ/a) компонент.

Решение задачи о дифракции гауссова пучка света на ребре уголкового отражателя мы будем искать методом последовательных приближений (точное решение самосогласованной задачи нам неизвестно).

В нулевом приближении мы рассчитываем распределение поля на внутренней поверхности диэлектрика по формулам Френеля в случае полного внутреннего отражения, предполагая, что дифрагированная волна отсутствует. Мы рассматриваем ограниченный в поперечном сечении световой пучок, поэтому формулы Френеля, справедливые только для плоского волнового фронта, необходимо скорректировать — учесть сдвиг Гуса–Хэнхена [3–5], что не сделано в [1]. Как будет показано ниже, при учете этой поправки количественная оценка потерь увеличивается приблизительно в два раза.

Основное допущение нашего расчета в нулевом приближении есть применение формул Френеля (справедливых для отражения от бесконечной плоскости) для отражения от полубесконечных граней уголкового отражателя.

Далее мы рассчитываем распределение поля на внешней поверхности диэлектрика, используя граничные условия для компонент электрического и магнитного полей. Применяя интегральную теорему Кирхгофа–Гельмгольца, мы рассчитываем дифрагированное поле на бесконечности (решение в первом приближении) и мощность дифракционных потерь.

Расчет дифракционных потерь

E-поляризация

Пусть на ребро уголкового отражателя под углом α к одной из его граней падает гауссов пучок света с радиусом поперечного сечения a и длиной

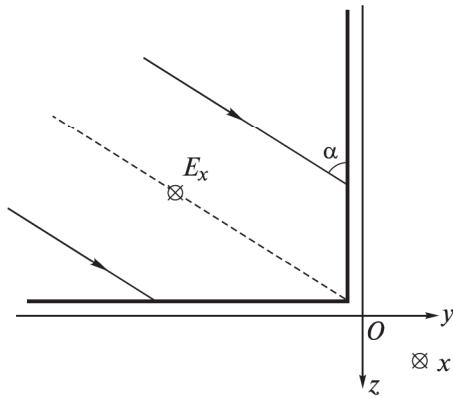


Рис. 2. Система координат для расчета распределения поля внутри углового отражателя. Вектор главной компоненты поля E_x выбран параллельным ребру

волны в вакууме λ_0 (считаем, что условие полного внутреннего отражения выполнено для обеих граней). Выберем систему координат так (рис. 2), чтобы главная компонента гауссова пучка E_x была параллельна ребру углового отражателя.

Поле световой волны внутри углового отражателя представляет собой сумму полей падающего (E_x^{inc}), отраженного от первой грани ($E_x^{\text{ref}1}$), отраженного от второй грани ($E_x^{\text{ref}2}$) и отраженного назад ($E_x^{\text{ref}12}$) света:

$$E_x(x, y, z) = E_x^{\text{inc}}(x, y, z) + E_x^{\text{ref}1}(x, y, z) + E_x^{\text{ref}2}(x, y, z) + E_x^{\text{ref}12}(x, y, z),$$

$$E_x^{\text{inc}}(x, y, z) = E_0 \exp[ik_0 n(y \sin \alpha + z \cos \alpha)] \times \exp\left[-\frac{x^2 + (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2}{a^2}\right],$$

$$E_x^{\text{ref}1}(x, y, z) = E_0 \exp[ik_0 n(y \sin \alpha - z \cos \alpha) - i\delta_1] \times \exp\left[-\frac{x^2 + (-y \cos \alpha - z \sin \alpha + D_1)^2}{a^2}\right],$$

$$E_x^{\text{ref}2}(x, y, z) = E_0 \exp[-ik_0 n(y \sin \alpha - z \cos \alpha) - i\delta_2] \times \exp\left[-\frac{x^2 + (-y \cos \alpha - z \sin \alpha + D_2)^2}{a^2}\right],$$

$$E_x^{\text{ref}12}(x, y, z) = E_0 \exp[-ik_0 n(y \sin \alpha + z \cos \alpha) - i\delta_1 - i\delta_2] \times \exp\left[-\frac{x^2 + (y \cos \alpha - z \sin \alpha + D_1 - D_2)^2}{a^2}\right],$$

$$\text{tg} \frac{\delta_1}{2} = \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n \cos \alpha}, \quad \text{tg} \frac{\delta_2}{2} = \frac{\sqrt{n^2 \cos^2 \alpha - 1}}{n \sin \alpha},$$

$$D_1 = \frac{\lambda_0}{\pi} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}, \quad D_2 = \frac{\lambda_0}{\pi} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 \cos^2 \alpha - 1}}.$$

Здесь коэффициенты D_1 и D_2 появляются благодаря учету сдвига Гуса–Хэнхена. Мы предполагаем, что

условия полного внутреннего отражения $\sin \alpha > 1/n$ и $\cos \alpha > 1/n$ выполнены.

Выражения для полей $E_x^{\text{ref}1}$ и $E_x^{\text{ref}2}$ были получены следующим образом. Мы разложили падающий на бесконечную плоскость раздела двух сред гауссов пучок в двойной интеграл Фурье по плоским волнам с учетом условия монохроматичности $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/c^2$ (частота ω задана). Каждая плоская волна, входящая в гауссов пучок, будет отражаться от плоскости раздела с некоторой своей фазой [6]. Сложив все отраженные плоские волны в отраженный гауссов пучок, мы получили, что распределение поля в этом пучке сдвинуто на некоторую величину D (которую и называют сдвигом Гуса–Хэнхена) относительно ожидаемого распределения при зеркальном отражении. Выражение для отраженной назад волны есть просто результат двух последовательных отражений. В этом месте мы проигнорировали ограниченность граней.

Зная распределение поля на внутренней поверхности призмы (позначим его индексом «int»), можно, используя уравнения Максвелла и граничные условия для компонент поля, найти распределение поля и его производных (с учетом соотношения $\lambda/a \ll 1$) на внешней поверхности (помечены индексом «ext»):

$$E_x^{\text{ext}}(x, 0, z) = E_x^{\text{int}}(x, 0, z), \quad E_x^{\text{ext}}(x, y, 0) = E_x^{\text{int}}(x, y, 0),$$

$$\left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial y}\right)^{y=0} = \left(\frac{\partial E_x^{\text{int}}}{\partial y}\right)^{y=0},$$

$$\left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial z}\right)^{z=0} = \left(\frac{\partial E_x^{\text{int}}}{\partial z}\right)^{z=0}.$$

Подставляя это распределение в интегральную теорему Кирхгофа–Гельмгольца, найдем распределение поля в дальней дифракционной зоне (рис. 3):

$$E_x(\mathbf{r}') = \int_{\Sigma} \left[E_x^{\Sigma} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_e} \right)^{\Sigma} - G^{\Sigma} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \mathbf{n}_e} \right)^{\Sigma} \right] d\mathbf{r} =$$

$$= \iint \left[E_x^{z=0} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^{z=0} - G^{z=0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right)^{z=0} \right] dx dy +$$

$$+ \iint \left[E_x^{y=0} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^{y=0} - G^{y=0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right)^{y=0} \right] dx dz. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n}_e — внешняя нормаль к поверхности, а G — функция Грина [7]

$$G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{\exp[ik_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|]}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|},$$

где \mathbf{r}' — радиус-вектор точки наблюдения поля, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки на поверхности интегрирования Σ — внешней поверхности углового отражателя. Характерные линейные размеры призмы можно считать много большими радиуса пучка, поэтому формально интегрирование можно распространить на полуплоскости $\{Oxy, -\infty < x < \infty,$

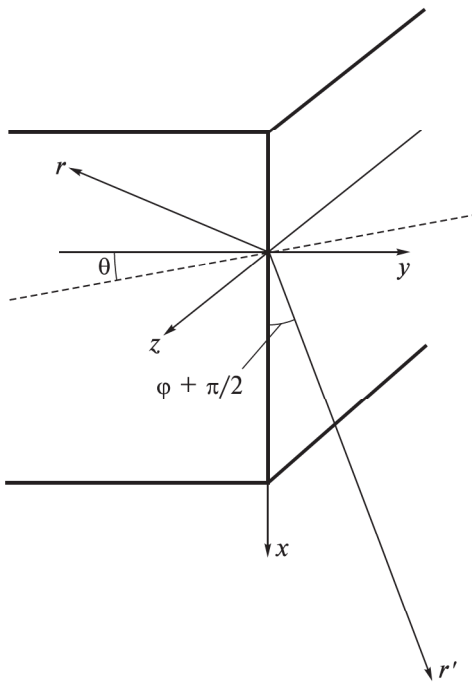


Рис. 3. Система координат для расчета распределения поля в дальней дифракционной зоне

$y < 0$ и $\{Oxz, -\infty < x < \infty, z < 0\}$. Предполагая, что расстояние r' от начала координат до точки наблюдения много больше линейных размеров призмы ($\forall \mathbf{r}, r' \gg r$), получаем

$$G^{z=0} \simeq \frac{1}{4\pi r'} \exp[ik_0 r' - ik_0 x \sin \varphi - ik_0 y \sin \theta],$$

$$G^{y=0} \simeq \frac{1}{4\pi r'} \exp[ik_0 r' - ik_0 x \sin \varphi - ik_0 z \cos \theta],$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^{z=0} \simeq \frac{ik_0 \cos \theta}{4\pi r'} \exp[ik_0 r' - ik_0 x \sin \varphi - ik_0 y \sin \theta],$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{y=0} \simeq \frac{ik_0 \sin \theta}{4\pi r'} \exp[ik_0 r' - ik_0 x \sin \varphi - ik_0 z \cos \theta].$$

Элементарное интегрирование (1) с учетом соотношения $\lambda/a \ll 1$ приводит к следующему результату:

$$E_x(r', \theta, \varphi) = -E_0 \frac{a}{r'} \frac{e^{ik_0 r'}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{a^2 k_0^2 \sin^2 \varphi}{4}\right] \cdot A(\theta), \quad (2)$$

$$A(\theta) = \left\{ \frac{\cos \theta - n \cos \alpha}{\sin \theta - n \sin \alpha} + \frac{\sin \theta - n \sin \alpha}{\cos \theta - n \cos \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\cos \theta + n \cos \alpha}{\sin \theta - n \sin \alpha} \exp\left[-i\delta_1 - ik_0 D_1 \frac{n \sin \alpha - \sin \theta}{\cos \alpha}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta - n \sin \alpha}{\cos \theta + n \cos \alpha} \exp\left[-i\delta_1 + ik_0 D_1 \frac{n \cos \alpha + \cos \theta}{\sin \alpha}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\cos \theta - n \cos \alpha}{\sin \theta + n \sin \alpha} \exp\left[-i\delta_2 + ik_0 D_2 \frac{n \sin \alpha + \sin \theta}{\cos \alpha}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta + n \sin \alpha}{\cos \theta - n \cos \alpha} \exp\left[-i\delta_2 - ik_0 D_2 \frac{n \cos \alpha - \cos \theta}{\sin \alpha}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos \theta + n \cos \alpha}{\sin \theta + n \sin \alpha} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-i(\delta_1 + \delta_2) + ik_0(D_1 - D_2) \frac{n \sin \alpha + \sin \theta}{\cos \alpha}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta + n \sin \alpha}{\cos \theta + n \cos \alpha} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-i(\delta_1 + \delta_2) - ik_0(D_1 - D_2) \frac{n \cos \alpha + \cos \theta}{\sin \alpha}\right] \right\}.$$

Вычислим поток энергии, уносимый рассеянной волной в окружающее пространство интегрированием вектора Пойнтинга по поверхности сферы радиуса r' . В выражении (2) гауссов множитель выделяет на сфере малую площадку, в пределах которой фронт дифрагированной волны можно считать практически плоским и применять выражение для вектора Пойнтинга (усредненного по времени) плоской волны $S = \frac{c}{2\pi} |E_x|^2$:

$$W_{\text{diffr}} = \int d\sigma (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \simeq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi r'^2 S(r', \theta, \varphi) = \\ = \frac{E_0^2 c a^2}{32\pi^2} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi \exp\left[-\frac{a^2 k_0^2 \sin^2 \varphi}{2}\right]}_{\simeq \sqrt{2\pi}/k_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta |A(\theta)|^2. \quad (3)$$

Последний интеграл в (3) вычисляем численно ($\lambda_0 = 1$ мкм, $\alpha = \pi/4$): $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta |A(\theta)|^2 \simeq 1392$.

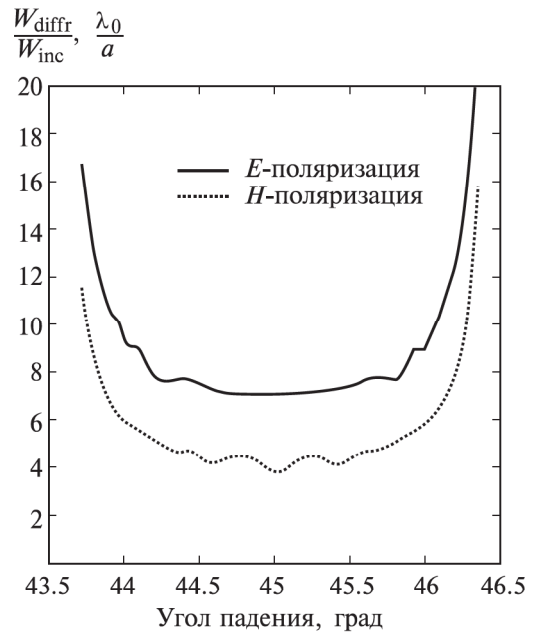


Рис. 4. Зависимость относительных потерь световой энергии от угла падения

Окончательно получим оценку относительных дифракционных потерь ($W_{\text{inc}} = \frac{1}{4}E_0^2ca^2$):

$$\frac{W_{\text{diffr}}}{W_{\text{inc}}} \simeq 7.03 \frac{\lambda_0}{a}, \quad \left. \frac{W_{\text{diffr}}}{W_{\text{inc}}} \right|_{\text{w/out G-H}} \simeq 2.65 \frac{\lambda_0}{a}.$$

Здесь мы привели для сравнения оценку дифракционных потерь, рассчитанных без учета сдвига Гуса–Хэнхена [1].

На рис. 4 представлена зависимость потерь от угла падения. Видно, что потери минимальны, когда угол падения $\alpha = \pi/4$.

H-поляризация

Этот случай рассматривается аналогично предыдущему. Выбирается такая система координат, чтобы главная компонента H_x гауссова пучка была параллельна ребру углового отражателя (рис. 5). Главное отличие от предыдущего случая состоит в более сложной связи внешних производных с внутренними:

$$\left(\frac{\partial H_x^{\text{ext}}}{\partial y} \right)^{y=0} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial H_x^{\text{int}}}{\partial y} \right)^{y=0},$$

$$\left(\frac{\partial H_x^{\text{ext}}}{\partial z} \right)^{z=0} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial H_x^{\text{int}}}{\partial z} \right)^{z=0}.$$

Можно также показать, что компоненты электрического поля на внешней поверхности диэлектрика претерпевают разрыв в начале координат:

$$\lim_{y \rightarrow 0} E_y^{\text{ext}}(x, y, 0) = n^2 \lim_{z \rightarrow 0} E_y^{\text{ext}}(x, 0, z),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} E_z^{\text{ext}}(x, y, 0) = n^2 \lim_{z \rightarrow 0} E_z^{\text{ext}}(x, 0, z).$$

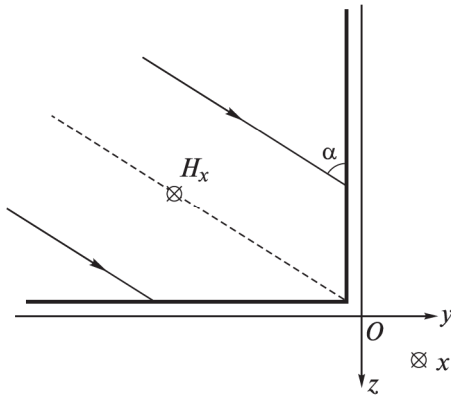


Рис. 5. Система координат для расчета распределения поля внутри углового отражателя. Вектор главной компоненты поля H_x выбран параллельным ребру

Выпишем результат для напряженности магнитного поля в дальней зоне:

$$H_x(r', \theta, \varphi) = -H_0 \frac{a}{r'} \frac{e^{ik_0 r'}}{4\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{a^2 k_0^2 \sin^2 \varphi}{4} \right] \cdot B(\theta),$$

$$B(\theta) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos \theta - \frac{1}{n} \cos \alpha}{\sin \theta - n \sin \alpha} + \frac{\sin \theta - \frac{1}{n} \sin \alpha}{\cos \theta - n \cos \alpha} + \\ & + \frac{\cos \theta + \frac{1}{n} \cos \alpha}{\sin \theta - n \sin \alpha} \exp \left[-i\delta_1 - ik_0 D_1 \frac{n \sin \alpha - \sin \theta}{\cos \alpha} \right] + \\ & + \frac{\sin \theta - \frac{1}{n} \sin \alpha}{\cos \theta + n \cos \alpha} \exp \left[-i\delta_1 + ik_0 D_1 \frac{n \cos \alpha + \cos \theta}{\sin \alpha} \right] + \\ & + \frac{\cos \theta - \frac{1}{n} \cos \alpha}{\sin \theta + n \sin \alpha} \exp \left[-i\delta_2 + ik_0 D_2 \frac{n \sin \alpha + \sin \theta}{\cos \alpha} \right] + \\ & + \frac{\sin \theta + \frac{1}{n} \sin \alpha}{\cos \theta - n \cos \alpha} \exp \left[-i\delta_2 - ik_0 D_2 \frac{n \cos \alpha - \cos \theta}{\sin \alpha} \right] + \\ & + \frac{\cos \theta + \frac{1}{n} \cos \alpha}{\sin \theta + n \sin \alpha} \times \\ & \times \exp \left[-i(\delta_1 + \delta_2) + ik_0(D_1 - D_2) \frac{n \sin \alpha + \sin \theta}{\cos \alpha} \right] + \\ & + \frac{\sin \theta + \frac{1}{n} \sin \alpha}{\cos \theta + n \cos \alpha} \times \\ & \times \exp \left[-i(\delta_1 + \delta_2) - ik_0(D_1 - D_2) \frac{n \cos \alpha + \cos \theta}{\sin \alpha} \right] \end{aligned} \right\},$$

где

$$\text{tg} \frac{\delta_1}{2} = \frac{n \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos \alpha}, \quad \text{tg} \frac{\delta_2}{2} = \frac{n \sqrt{n^2 \cos^2 \alpha - 1}}{\sin \alpha},$$

$$D_1 = \frac{\lambda_0 n^2}{\pi} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}, \quad D_2 = \frac{\lambda_0 n^2}{\pi} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 \cos^2 \alpha - 1}}.$$

Величины дифракционных потерь с учетом и без учета сдвига Гуса–Хэнхена

$$\frac{W_{\text{diffr}}}{W_{\text{inc}}} \simeq 3.82 \frac{\lambda_0}{a}, \quad \left. \frac{W_{\text{diffr}}}{W_{\text{inc}}} \right|_{\text{w/out G-H}} \simeq 2.09 \frac{\lambda_0}{a}.$$

Зависимость величины относительных потерь от угла падения представлена на рис. 4.

Заключение

В настоящей работе проведена оценка дифракционных потерь энергии гауссова пучка света на ребре диэлектрического углового отражателя с учетом явления сдвига Гуса–Хэнхена для обеих поляризаций в первом приближении по параметру λ/a . Показано, что относительные потери имеют минимальную величину при угле падения $\alpha = \pi/4$, а также что учет сдвига Гуса–Хэнхена приводит к существенному (в 1.8–2.7 раза при угле падения $\pi/4$) увеличению количественной оценки потерь.

Для радиуса пучка $a \simeq 8.49$ см (в варианте Advanced LIGO) и длины волны $\lambda_0 = 1.064$ мкм коэффициенты отражения по интенсивности R , определяемые дифракционными потерями, составляют величины $(1-R)_E \simeq 0.88 \cdot 10^{-4}$ и $(1-R)_H \simeq 0.48 \cdot 10^{-4}$ для E- и H-поляризации соответственно. Эти значения устанавливают фундаментальный предел оп-

тических потерь в угловых отражателях на эффекте полного внутреннего отражения (в отличие от сферических зеркал с многослойными покрытиями, в которых подобного предела нет).

Автор признателен С. П. Вятчанину и А. Н. Боголюбову за ценные советы и замечания.

Литература

1. *Braginsky V.B., Vyatchanin S.P.* // Phys. Lett. A. 2004. **324**. P. 345.
2. *Быков В.П., Силичев О.О.* Лазерные резонаторы. М., 2003.
3. *Artmann K.* // Ann. Physik. 1948. **2**. P. 87.
4. *Lotsch H.K.V.* // JOSA. 1968. **58**. P. 551.
5. *Lai H.M., Cheng F.C., Tang W.K.* // JOSA A. 1986. **3**. P. 550.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 2001.
7. *Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. М., 1998.

Поступила в редакцию
21.04.06