УДК 519.634

О ЗНАЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТА ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА $\mathring{W}_2^1(X)$ В ТОЧКЕ ОБЛАСТИ X

М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Введено понятие ко-пучка пространств Соболева и значения элемента Соболева пространства в точке. Указаны некоторые теоремы о связи сходимости по норме и поточечной сходимости.

При исследовании краевых задач, рассматриваемых в области X n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, требуется изучить проникновение топологии пространства X в топологию пространства Соболева $\mathring{W}_2^1(X)$, чему посвящены работы [1, 2]. При этом удобно ввести следующее обобщение понятия гильбертова пространства:

Определение. Скажем, что на топологическом пространстве X задан ко-пучок гильбертовых пространств $\mathcal{H}(X)$, если каждому открытому множеству $U \subset X$ отвечает гильбертово пространство $\mathfrak{H}(U)$, причем

1) вложение $U \subset U'$ влечет $\mathfrak{H}(U) \subset \mathfrak{H}(U')$;

2) $\mathfrak{H}(\varnothing) = 0$;

3) конечному пересечению областей U_i отвечает

$$\mathfrak{H}(\cap U_i) = \bigcap \mathfrak{H}(U_i);$$

4) произвольному (быть может, несчетному) объединению областей U_α соответствует замыкание по норме $\mathfrak{H}$ линейного пространства, образованного всевозможными конечными суммами элементов из пространств $\mathfrak{H}(U_\alpha)$, т. е.

$$\mathfrak{H}(\cup U_\alpha) = \overline{\sum \mathfrak{H}(U_\alpha)}.$$

В качестве гильбертова пространства, индуцированного на замкнутом множестве Z, примем ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}(X - Z)$, т. е.

$$\mathfrak{H}(Z) := \mathfrak{H}(X - Z)^T.$$

В частности, поставив в соответствие каждому открытому множеству U в $X \subset \mathbb{R}^n$ пространство Соболева $\mathring{W}_2^1(U)$ и приняв $\mathring{W}_2^1(\varnothing) = 0$ для определенности, получим *ко-пучок пространств Соболева* $\mathring{\mathcal{W}}_2^1(X)$ на топологическом пространстве $X \subset \mathbb{R}^n$.

Широкий класс приложений открывает уже то простое наблюдение, что любая точка x в $\mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством, и поэтому определено пространство $\mathring{W}_2^1(x)$. Удается доказать следующее:

Теорема 1. *Пространство $\mathring{W}_2^1(x)$ одномерно, и если обозначить проектор на $\mathring{W}_2^1(X)$ как $P(x)$, то для любой гладкой в точке x функции v верно*

$$P(x)v = v(x)P(x)w, \tag{1}$$

где w — произвольная гладкая функция, равная единице в точке x.

Тем самым для любого элемента $\mathring{W}_2^1(X)$ можно ввести понятие значения в точке x как коэффициента в разложении $P(x)v$ по базису, состоящему из одного вектора $e_x = P(x)$, т. е. равного образу произвольной гладкой функции, равной единице в точке x.

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько утверждений.

1. *Пространство $\mathring{W}_2^1(x)$ образовано гармоническими функциями с особенностью в точке x, причем*

$$C^2(X) \cap \mathring{W}_2^1(x) = 0. \tag{2}$$

В самом деле, пространство $\mathring{W}_2^1(x)$ образовано всеми элементами $\mathring{W}_2^1(X)$, ортогональными к $C_0^\infty(X - x)$, поэтому $v \in \mathring{W}_2^1(x)$ означает, что

$$\int\limits_U dx\, (\nabla w, \nabla v) = 0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(U)$$

и для любой области U, не содержащей x. Отсюда в силу леммы Вейля [3] следует, что функция v принадлежит $C^2(X - x)$ и является гармонической в области $X - x$. Если к тому же функция $v \in C^2(X)$, то ее лапласиан $\Delta v \in C(X)$ и всюду в $X - x$ равен нулю, значит, он равен нулю и в точке x и $v \in C^2(X)$ — гармоническая функция в X из $\mathring{W}_2^1(X)$, а такая функция равна нулю.

2. *Элемент $v \in C_0^\infty(X)$, равный тождественно* 1 *в некоторой окрестности U точки x, не принад-*

лежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X-x)$*, и поэтому*

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1(X-x) \neq \overset{\circ}{W}{}_2^1(X), \quad \text{т. е.} \quad \overset{\circ}{W}{}_2^1(x) \neq 0. \tag{3}$$

Допустим противное: пусть элемент $v \in C_0^\infty(X)$, тождественно равный единице в некоторой кубической окрестности U точки x, не принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X-x)$, но существует сходящаяся к нему последовательность $v_m \in C_0^\infty(X-x)$. Взяв пробную функцию $\varphi \in C_0^\infty(U)$, видим, что существует последовательность $w_m = \varphi(1-v_m) \in C^\infty(U)$, для которой верно

$$\int_X dy\, |\nabla w_m|^2 \to 0, \tag{4}$$

$$w_m(x) = 1, \tag{5}$$

поскольку носитель v_m не содержит точку x, и, наконец,

$$\int_X dy\, |w_m|^2 \to 0. \tag{6}$$

Так же как при доказательстве неравенства Пуанкаре [4], из соотношения

$$w_m(y) - 1 = \int_x^y (\nabla w_m, dl),$$

где интеграл берется по произвольному контуру, соединяющему точки x и y, получается

$$\int_U dy\, |w_m(y) - 1|^2 \leqslant 2L^2 \int_U dy\, |\nabla w_m(y)|,$$

где L — длина ребра куба U. Поэтому из утверждения (4) следует, что w_m сходится в среднем к единице, что противоречит (6). Поэтому последовательности w_m с указанными свойствами действительно существовать не может.

3. *Наоборот, любой элемент* $v(y) \in C_0^\infty(X)$*, равный нулю в точке* x*, принадлежит* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X-x)$. Окружим x малой шаровой окрестностью $|x-y| \leqslant r$ радиуса r, и воспользуемся теоремой о существовании пробной функции [5], т. е. функции $\varphi(y,r) \in C^\infty(X)$, которая

1) равна тождественно нулю в круге $|x-y| \leqslant r/2$;

2) равна единице вне $|x-y| \leqslant r$;

3) заключена на интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$;

4) $|\nabla_y \varphi(y,r)| \leqslant C/r$, где C — константа, не зависящая от r.

Образуем при ее помощи последовательность $\{v(y)\varphi(y,r)\} \in C_0^\infty(X-x)$ и заметим, что

$$||v - v\varphi(r)||^2 = \int_{|x-y|\leqslant r} dy\, |\nabla_y v(y)(1-\varphi(y,r))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{|x-y|\leqslant r} dy\, |\nabla_y v(y)|^2 + 2 \int_{|x-y|\leqslant r} dy\, |\nabla_y \varphi(y,r)|^2 |v(y)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2S(n) \left(r^n \sup_{|x-y|\leqslant r} |\nabla v(y)|^2 \right) + {} + C^2 \left(r^{n-2} \sup_{|x-y|\leqslant r} |v(y)|^2 \right),$$

где $S(n)$ — площадь n-мерной сферы. Из условия $v(x) = 0$ следует, что

$$\sup_{|x-y|\leqslant r} |v(y)| \leqslant C' r,$$

поэтому $||v - v\varphi(r)||^2 \leqslant C'' r^n$ и, значит, стремится к нулю при $r \to 0$. Тем самым построена последовательность элементов $C_0^\infty(X-x)$, сходящаяся по норме W_2^1 к рассматриваемой функции v, а значит, и доказано вложение

$$\{v \in C_0^\infty(X)\colon v(x) = 0\} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(X-x). \tag{7}$$

Соотношения (3) и (7) позволяют подсчитать размерность линейного пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(x)$. Из соотношения (3) следует, что существует такой элемент $w \in C_0^\infty(X)$, что $w(x) = 1$ и $P(x)w \neq 0$. Тогда для любого элемента $v \in C_0^\infty(X)$ можно образовать функцию

$$u(y) := v(y) - v(x)w(y) \in C_0^\infty(X),$$

которая равна нулю в точке x. Поэтому в силу соотношения (7) верно

$$0 = P(x)u = P(x)v - v(x)P(x)w,$$

т. е.

$$P(x)v = v(x)P(x)w. \tag{8}$$

Если обозначить $P(x)w \neq 0$ как e_x, то получается, что все линейное пространство $P(x)C_0^\infty(X)$ в точности совпадает с линейным пространством, натянутым на элемент $e_x \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(x)$. Отсюда ясно, что это пространство имеет размерность 1 и что его замыкание $P(x)$ $\overset{\circ}{W}{}_2^1(x)$ совпадает с ним. Это и завершает доказательство теоремы 1.

Если о v известно лишь, что она непрерывна, то к ней сходится некоторая последовательность $v_n \in C_0^\infty(X)$, причем всегда можно добиться того, чтобы в заданной точке x все функции v_n принимали значение $v(x)$, тогда

$$||P(x)v - v(x)e_x|| = ||P(x)v - P(x)v_n|| \to 0,$$

и поэтому соотношение (8) остается в силе для любой непрерывной функции.

Замечание. Элемент e_x весьма похож на функцию Грина. Будучи элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^1(x)$, он является гармонической функцией с особенностью в точке x, причем

$$(e_x, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)} = (e_x, v) = (P(x)e_x, v) = (e_x, P(x)v) = \\ = v(x)(e_x, e_x)$$

или, если положить $\rho(x) := ||e_x||^{-1}$,

$$(\rho(x)e_x, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)} = v(x) \quad \forall\, v \in C_0^\infty(X).$$

Функция $\rho(x)^2 e_x$ является гармонической функцией с одной особой точкой $y = x$ из $C^2(X - x) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, которую мы будем обозначать как $g(x, y)$. Ее особенность такова, что

$$\int\limits_X dy\, (\nabla_y g(x, y), \nabla_y v(y)) = v(x) \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(X) \cap C(X). \tag{9}$$

Подчеркнем, что из этого соотношения не следует

$$\int\limits_X dy\, v(y) \Delta_y g(x, y) = 0,$$

но лишь

$$\int\limits_{X - U_x} dy\, v(y) \Delta_y g(x, y) = \int\limits_{\partial U_x} d\tau_y\, v(y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_y}.$$

Более того, при $n > 1$ соотношение $\Delta_y g(x, y) = \delta(y - x)$ невозможно, поскольку тогда $g(x, y)$ была бы функцией Грина и как функция y принадлежала бы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$.

Тем не менее многие свойства функции Грина остаются в силе. Например, соотношение (9), примененное к $v(y) = g(z, y)$, дает

$$g(x, z) = \int\limits_X dy\, (\nabla_y g(x, y), \nabla_y g(z, y)),$$

откуда видно, что $g(x, y)$ — симметричная функция. Поэтому $g(x, y)$ и как функция x тоже гармоническая при $x \neq y$. Фактически же установлено существование некоторого аналога функции Грина относительно скалярного произведения в W_2^1: для произвольной области $X \subset \mathbb{R}^n$ существует симметричная по x и y функция $g(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \Delta_y g(x, y) = 0, \quad y \in X - x, \\ g(x, y)\big|_{y \in \partial X} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

и для любой функции $v \in C(X) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ верно

$$v(x) = \int\limits_X dy\, (\nabla_y g(x, y), \nabla_y v(y)). \tag{11}$$

Тем самым установлено существование некоторой функции g, удовлетворяющей условиям (10)–(11), которое вовсе не очевидно даже в $\mathbb{R}^2$. Казалось бы, если $x = O$ — начало координат, то функция $g(O, y)$ должна быть симметрична относительно группы поворотов осей. Поэтому она должна зависеть только от $|y|$, и из обыкновенного дифференциального уравнения $\Delta g = 0$ моментально получается

$$g = C_1 \ln |y| + C_2,$$

которая не принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}^2)$ против нашего утверждения. На самом деле преобразование из этой группы должно переводить $g(O, y)$ в некоторый элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(O)$, и она может зависеть от углов. Точно так же аналитическая функция $f(z) = z^{-1}$ является симметричной, а ее действительная часть таковой не является.

Используя неравенство

$$|v(x) - w(x)|\, ||e_x|| = ||P(x)(v - w)|| \leqslant ||v - w||,$$

можно доказать следующее утверждение:

Теорема 2. *Если элементы v и w пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ близки к друг другу по норме W_2^1*

$$||v - w|| \leqslant \varepsilon$$

и непрерывны в X, то они близки и поточечно:

$$|v(x) - w(x)| \leqslant \rho(x)\varepsilon \quad \forall\, x \in X,$$

где

$$\rho(x) = ||e_x||^{-1}.$$

В частности, если имеется численный алгоритм построения последовательности $v(x, h) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(X) \cap C(X)$, сходящийся по норме W_2^1 к классическому решению $v(x) \in C^2(X)$ с порядком k, т. е.

$$||v(h) - v|| \leqslant Ch^k,$$

где C — некоторая константа, а h — параметр, характеризующий выбранное приближение (например, длина грани в триангуляции области для метода конечных элементов), то для любого компакта K, отделенного от границы X, существует такая константа $C'(K)$, что

$$|v(x, h) - v(x)| \leqslant C'(K) h^k.$$

Отсюда ясно, что метод конечных элементов порядка один и выше, как и любой другой проекционный метод, использующий непрерывные функции, сходится равномерно на любом компакте. Этот факт хорошо известен в рамках численного эксперимента, но его обоснование доставляет множество хлопот. К примеру, в [7] его доказывают только для линейных конечных элементов при $k = 1$.

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 4. С. 12 (Moscow University Phys. Bull. 2005. N 4. P. 13).

2. *Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2007. № 1. С. 28 (Moscow University Phys. Bull. 2007. N 1).
3. *Hellwig G.* Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Berlin; Göttingen; Heidelberg, 1964.
4. *Гильберт Д., Курант Р.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1951; Т. 2. М., 1945.
5. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М., 1986.
6. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Berlin; Heidelberg; New York, 1969.
7. *Марчук Г.И., Агошкин В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.

Поступила в редакцию
15.03.06