

УДК 517.958:533.7

КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Т. Г. Елизарова^{*)}, А. А. Хохлов
(кафедра математики)

E-mail: hohlov@afrodita.phys.msu.ru

Построена система квазигазодинамических уравнений для течений в присутствии внешних сил и источников тепла. Выведено уравнение баланса энтропии, демонстрирующее диссипативный характер возникающих дополнительных слагаемых.

Введение

Актуальными задачами численного моделирования газодинамических течений являются задачи с внешними источниками энергии. В качестве таких проблем укажем, в частности, задачи горения, исследование возможностей управления потоками с помощью энергосложения, расчеты активных сред в резонаторах газовых лазеров и течения излучающего газа [1].

Для численного решения задач динамики вязкого газа разработаны эффективные разностные алгоритмы, использующие специальный вид регуляризации. Регуляризаторы строятся на основе квазигазодинамических уравнений (см., напр., [2–4]), которые отличаются от уравнений Навье–Стокса дополнительными слагаемыми дивергентного вида. Эти слагаемые имеют диссипативный характер, что демонстрируется справедливостью теоремы о неубывании полной термодинамической энтропии в замкнутом объеме, доказанной для этих уравнений. Однако построенные алгоритмы не охватывали задач с внешними источниками энергии.

В настоящей работе на основе подхода [2] построены квазигазодинамические уравнения при наличии в потоке тепловых источников. Показан диссипативный характер возникающих добавок.

КГД уравнения при наличии внешних сил и тепловых источников

Следуя методике, изложенной в [2], заметим, что из системы уравнений Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \rho F_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) = \rho u_i F_i + Q \quad (3)$$

для идеального политропного газа с уравнением состояния

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T \quad (4)$$

следуют тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{\rho} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - (\gamma - 1) Q = 0. \quad (8)$$

Здесь и далее использованы обычные обозначения: ρ — удельная плотность, u_i — компонента скорости, p — давление, F_i — компонента внешней силы, ε — удельная внутренняя энергия, Q — мощность тепловых источников. В формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Справедливость тождеств (5)–(8) можно проверить непосредственной подстановкой в них выражений для производных по времени из уравнений Эйлера (1)–(3) с последующим приведением подобных слагаемых.

Запишем интегральные законы сохранения для малого объема V в конечно-разностном виде, заменяя производные по времени разностным отношением для моментов времени t и $t + \Delta t$, где Δt — малый промежуток времени. Тогда законы сохранения массы, импульса и полной энергии можно представить в виде соответственно:

$$\int_V \frac{\hat{\rho} - \rho}{\Delta t} d^3x + \iint_{\Sigma} \rho^* u_i^* d\sigma_i = 0, \quad (9)$$

$$\int_V \frac{\hat{\rho} u_i - \rho u_i}{\Delta t} d^3x + \iint_{\Sigma} \rho^* u_i^* u_j^* d\sigma_j + \iint_{\Sigma} p^* d\sigma_i =$$

^{*)} Институт математического моделирования РАН.

$$= \int_V \rho^* F_i d^3x + \iint_{\Sigma} \Pi_{NSij}^* d\sigma_j, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\hat{\rho}(\hat{u}^2/2 + \hat{\varepsilon}) - \rho(u^2/2 + \varepsilon)}{\Delta t} d^3x + \\ & + \iint_{\Sigma} \rho^* u_i^* \left(\frac{u^{*2}}{2} + \varepsilon^* + \frac{p^*}{\rho^*} \right) d\sigma_i + \iint_{\Sigma} q_{NSi}^* d\sigma_i = \\ & = \int_V \rho^* u_i^* F_i d^3x + \iint_{\Sigma} \Pi_{NSij}^* u_i^* d\sigma_j + \int_V Q^* d^3x. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь вектор теплового потока и тензор вязких напряжений вычисляются как

$$q_{NSi} = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_i} T, \quad (12)$$

$$\Pi_{NSij} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right), \quad (13)$$

η и κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности. Величинами со звездочками в (9)–(11) обозначены значения газодинамических параметров в момент времени $t < t^* < t + \Delta t$. Обозначим $\Delta t/2 = \tau$ и определим параметры газа в средней точке $t = t^*$, ограничиваясь первым порядком малости по τ :

$$\rho^* = \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (14)$$

$$u_i^* = u_i + \tau \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (15)$$

$$p^* = p + \tau \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (16)$$

Подставим эти выражения в формулы (9)–(11). Величины F_i и Q считаем мало меняющимися за время τ , поэтому звездочки возле них просто отбросим. Заметим также, что фактически использованное нами соотношение

$$\frac{\hat{\phi} - \phi}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \quad (17)$$

верно с точностью до членов второго порядка по Δt , поэтому в получающихся формулах слагаемыми порядка $O(\tau^2)$ можно пренебречь. Возвращаясь вновь к дифференциальному виду производной по времени в интегралах по объему, получим

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho d^3x + \iint_{\Sigma} \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) d\sigma_i = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i d^3x + \iint_{\Sigma} \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) u_j d\sigma_j + \\ & + \iint_{\Sigma} \tau \rho u_i \frac{\partial}{\partial t} u_j d\sigma_j + \iint_{\Sigma} \left(p + \tau \frac{\partial}{\partial t} p \right) d\sigma_i = \end{aligned}$$

$$= \int_V \left(\rho + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) F_i d^3x + \iint_{\Sigma} \Pi_{NSij} d\sigma_j, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) d^3x + \\ & + \iint_{\Sigma} \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) d\sigma_i + \\ & \iint_{\Sigma} \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial t} u_j + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + p \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} p \right) d\sigma_i + \\ & + \iint_{\Sigma} q_{NSi} d\sigma_i = \int_V \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) F_i d^3x + \\ & + \iint_{\Sigma} \Pi_{NSij} u_i d\sigma_j + \int_V Q d^3x. \quad (20) \end{aligned}$$

Считаем, что в нулевом по τ приближении для нашего газа справедливы уравнения Эйлера (1)–(3). Используем эти уравнения и следующие из них тождества (5)–(8) для того, чтобы исключить производные по времени в слагаемых, линейных по τ . Приведем подобные члены, сгруппируем однотипные слагаемые и используем произвольность объема V , чтобы перейти от интегральной формы уравнений (18)–(20) к дифференциальной. Получим систему квазигазодинамических уравнений в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} j_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \rho_* F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i = \\ & = j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ij} u_j + Q, \quad (23) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$j_i = \rho(u_i - w_i), \quad (24)$$

$$w_i = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho F_i \right), \quad (25)$$

$$\rho_* = \left(\rho - \tau \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k \right), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & \Pi_{NSij} + \tau \rho u_i \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} p - F_j \right) + \\ & + \tau \delta_{ij} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1) Q \right), \quad (27) \end{aligned}$$

$$q_i = q_{NSi} - \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + p u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho} \right). \quad (28)$$

При $\tau = 0$ квазигазодинамическая система уравнений совпадает с системой уравнений Навье–Стокса.

Уравнение баланса энтропии

В работе [4] было показано, что в случае $Q = 0$ производство энтропии для системы (21)–(23) является неотрицательным. Обобщим этот результат на случай $Q \neq 0$.

Обозначим полную производную по времени оператором

$$D \cdot = \rho \frac{\partial}{\partial t} \cdot + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - w_i) \cdot = \frac{\partial}{\partial t} \rho \cdot + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \cdot. \quad (29)$$

Будем считать, что параметры рассматриваемого газа удовлетворяют тождеству Гиббса

$$TDs = D\varepsilon + pD\frac{1}{\rho}. \quad (30)$$

Используя систему (21)–(23), получим из этого равенства уравнение для энтропии s . Перенесем в уравнении (22) все слагаемые в левую часть и домножим на u_i :

$$0 = u_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} j_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho_* F_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji} \right) = \\ = D\frac{u^2}{2} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho_* F_i u_i - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji}. \quad (31)$$

Отсюда следует соотношение

$$D\frac{u^2}{2} = -u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + \rho_* F_i u_i + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji}. \quad (32)$$

Уравнение (23) можно записать в виде

$$D \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i = j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ij} u_j + Q, \quad (33)$$

откуда, используя предыдущее равенство, получаем

$$D\varepsilon = j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji} u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} q_i - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} - \rho_* F_i u_i - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p = \\ = (j_i - \rho_* u_i) F_i + \Pi_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} q_i - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + Q.$$

Заметим, что $D\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - w_i)$, поэтому

$$Ds = \frac{1}{T} D\varepsilon + \frac{p}{T} D\frac{1}{\rho} = \frac{1}{T} \left((j_i - \rho_* u_i) F_i + \Pi_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} q_i - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + Q \right) + \frac{p}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - w_i) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{T} + q_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left((j_i - \rho_* u_i) F_i + \Pi_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + Q + p \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - w_i) \right).$$

Получаем уравнение баланса энтропии в виде

$$Ds = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{T} + X, \quad (34)$$

где производство энтропии X имеет вид

$$X = q_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \left((j_i - \rho_* u_i) F_i + \Pi_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + Q + p \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - w_i) \right). \quad (35)$$

Критерием физической корректности теории является неотрицательность $X \geq 0$ при $Q \geq 0$. Из полученного выражения (35), на первый взгляд, неотрицательность X не следует.

Преобразуем выражение (35), учитывая (24)–(28). Рассмотрим отдельно каждое слагаемое, выделяя, где это возможно, неотрицательные комбинации величин.

Для первого слагаемого получим

$$q_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{T} = \left(-\varkappa \frac{\partial}{\partial x_i} T - \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{T} = \varkappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \\ + \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho} \right) \frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} T = \\ = \varkappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \tau \rho \frac{u_i u_j}{T \varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon \right) - \\ - \frac{\tau u_i u_j p}{T \varepsilon \rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \right) - \frac{\tau u_i Q}{T \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{1}{T} ((j_i - \rho_* u_i) F_i) = \frac{1}{T} \left(j_i - (\rho - \tau \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j) u_i \right) F_i = \\ = \frac{F_i}{T} \left(-\rho w_i + \tau u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j \right) = \\ = \frac{F_i \tau}{T} \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j - \frac{\partial}{\partial x_i} p + \rho F_i \right) = \\ = \frac{\tau \rho}{T} F_i F_i - \frac{\tau \rho F_i}{T} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{\tau F_i}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} p.$$

Заметив, что

$$\frac{\Pi_{NSij} \Pi_{NSij}}{2\eta T} = \frac{\eta}{T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

преобразуем следующий фрагмент в формуле для X :

$$\frac{1}{T} \Pi_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i = \frac{1}{T} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right) + \right. \\ \left. + \tau \rho u_j \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i \right) + \right. \\ \left. + \tau \delta_{ij} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1) Q \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_i =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Pi_{NSij}\Pi_{NSij}}{2\eta T} + \\
 &+ \frac{\tau\rho u_j}{T} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i \right) \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \\
 &+ \frac{\tau}{T} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma\rho \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1)Q \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_i.
 \end{aligned}$$

Наконец рассмотрим оставшиеся слагаемые:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \frac{p}{\rho} + \frac{1}{T} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{p}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - w_i) = \\
 = \frac{\tau}{\rho T} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho F_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} p.
 \end{aligned}$$

Собирая все фрагменты исходной формулы вместе, получаем

$$\begin{aligned}
 X = \varkappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\Pi_{NSij}\Pi_{NSij}}{2\eta T} + \\
 + \frac{\tau\rho}{T} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i \right)^2 + \\
 + \frac{\tau\rho u_i u_j}{T\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon \right) - \\
 - \frac{\tau\rho u_i u_j}{T\varepsilon\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \right) - \frac{\tau u_i Q}{T\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + \\
 + \frac{\tau}{T} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma\rho \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1)Q \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_i + \\
 + \frac{\tau}{T} u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_j \right) + \\
 + \frac{\tau}{\rho T} u_i u_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \right) + \frac{Q}{T}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Для краткости здесь и далее использовано обозначение $(a_i)^2 \equiv \delta_{ij} a_i a_j$.

Используя соотношение

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho,$$

можно записать (36) в виде

$$\begin{aligned}
 X = \varkappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\Pi_{NSij}\Pi_{NSij}}{2\eta T} + \\
 + \frac{\tau\rho}{T} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i \right)^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{\tau\rho}{T\varepsilon} \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{\rho} \right)^2 + \\
 + \frac{\tau\rho}{\rho^2 T} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i \right)^2 + \frac{Q}{T_*}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

где

$$T_* = T \left(1 + \tau \left(\frac{1}{\varepsilon} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{\varepsilon\rho} \right) \right)^{-1}.$$

Как видно из полученного выражения, при $Q > 0$ (при $Q < 0$ энтропия может убывать) производство энтропии является неотрицательным, если величина τ является достаточно малой. При $\tau = 0$ величина производства энтропии (37) совпадает с соответствующей величиной, вычисленной для уравнений Навье–Стокса.

Выводы

В работе построена система квазигазодинамических уравнений в случае, когда система находится под влиянием внешних сил и источников тепла. Для этого случая построено уравнение баланса энтропии. Показано, что при условии малости параметра τ производство энтропии является неотрицательным.

Полученный результат позволяет расширить область применения квазигазодинамических уравнений и соответствующих им численных алгоритмов для расчета течений вязкого сжимаемого газа в присутствии внешних тепловых источников.

Литература

1. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М., 1985.
2. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.
3. Елизарова Т.Г., Соколова М.Е., Шеретов Ю.В. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 3. С. 545.
4. Елизарова Т.Г., Серегин В.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 4. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 2005. N 4. P. 17).

Поступила в редакцию
22.05.06