

УДК 621.372.8

## РАСЧЕТ ПОСТОЯННОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КИРАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА МЕТОДОМ СМЕШАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Н. Боголюбов, Н. А. Мосунова

(кафедра математики)

**Рассмотрено решение задачи о нахождении постоянной распространения в прямоугольном киральном волноводе методом смешанных конечных элементов. Показано, что данный метод имеет хорошую точность и может эффективно применяться для решения подобных задач.**

### Введение

Интенсивное развитие радиоэлектронной промышленности сделало актуальным всестороннее изучение свойств веществ, сильно взаимодействующих с электромагнитными волнами. Одной из групп таких принципиально новых материалов явились киральные среды, представляющие собой совокупность композиционно расположенных в диэлектрической среде электромагнитных частиц зеркально-асимметричной формы.

В настоящее время существует развитый математический аппарат для аналитического и численного исследования киральных сред [1]. Например, для численного моделирования волноведущих систем с киральным заполнением широко используются методы, основанные на проекционных алгоритмах, в частности метод Галеркина [2]. В гораздо меньшей степени используются алгоритмы, основанные на методе конечных разностей в прямой и вариационных постановках (метод конечных элементов). В настоящей работе рассматривается применение метода смешанных конечных элементов к расчету прямоугольного волновода, заполненного киральной средой.

### Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольный волновод со сторонами  $a$  и  $b$ , заполненный киральной средой. Поле в таком волноводе в отсутствие токов и зарядов для стационарной задачи описывается системой уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{D}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{B}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{H}, \mathbf{E}$  — векторы напряженности магнитного и электрического поля,  $\mathbf{D}, \mathbf{B}$  — электрическая и магнитная индукции,  $k = \omega/c$ .

Материальные уравнения киральной среды возьмем в наиболее общем виде

$$\mathbf{D} = a_{11}\mathbf{E} + a_{12}\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = a_{21}\mathbf{E} + a_{22}\mathbf{H} \quad (2)$$

с граничным условием

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

На самом деле материальными уравнениями (2) описывается более общий класс сред, называемых биизотропными. В этой работе будем предполагать, что матрица коэффициентов (2) невырождена, коэффициенты  $a_{12}$  и  $a_{21}$  являются комплексно сопряженными, коэффициент  $a_{11}$  представляет собой диэлектрическую проницаемость среды,  $a_{22}$  — магнитную, что соответствует случаю киральной среды.

В силу регулярности системы вдоль оси  $z$  можно записать  $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{i\gamma z}$ , где  $\gamma$  — постоянная распространения прямоугольного кирального волновода. Тогда систему уравнений (1) можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{rot}_\gamma \mathbf{H} = -ika_{11}\mathbf{E} - ika_{12}\mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot}_\gamma \mathbf{E} = ika_{21}\mathbf{E} + ika_{22}\mathbf{H}, \quad (5)$$

где

$$\operatorname{rot}_\gamma \mathbf{X} = \left( \frac{\partial X_z}{\partial y} - \gamma X_y \right) \mathbf{e}_x + \left( \gamma X_x - \frac{\partial X_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z.$$

Выразив  $\mathbf{H}$  из уравнения (5) и подставив в (4), получим задачу относительно вектора электрического поля  $\mathbf{E}$  следующего вида:

$$\operatorname{rot}_\gamma \frac{1}{a_{22}} \operatorname{rot}_\gamma \mathbf{E} - ik \operatorname{rot}_\gamma \frac{a_{21}}{a_{22}} \mathbf{E} + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \operatorname{rot}_\gamma \mathbf{E} - k^2 a_{11} \mathbf{E} + k^2 \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \mathbf{E} = 0. \quad (6)$$

Умножим (6) скалярно справа на  $\tilde{\mathbf{E}}^*$  из того же пространства, что и  $\mathbf{E}$ , проинтегрируем по всей области, учтем свойства скалярного произведения и граничные условия. В результате выражение (6) примет следующий вид:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{a_{22}^*} (\operatorname{rot}_\gamma \tilde{\mathbf{E}}^*, \operatorname{rot}_\gamma \mathbf{E}) dS - \int_{\Omega} ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} (\operatorname{rot}_\gamma \tilde{\mathbf{E}}^*, \mathbf{E}) dS +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} ik \frac{a_{12}}{a_{22}} (\text{rot}_{\gamma} \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}^*) dS - \int_{\Omega} k^2 a_{11}(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}^*) dS + \\
 & + \int_{\Omega} k^2 \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} (\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}^*) dS = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Или в покомпонентной записи, приводя члены при одинаковых степенях  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \gamma^2 \left( \frac{1}{a_{22}^*} E_y \tilde{E}_y + \frac{1}{a_{22}^*} E_x \tilde{E}_x \right) dx dy + \\
 & + \int_{\Omega} \gamma \left( -\frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} E_y - \frac{1}{a_{22}^*} \tilde{E}_y \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} E_x - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{a_{22}^*} \tilde{E}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \tilde{E}_y E_x - ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \tilde{E}_x E_y - \right. \\
 & \quad \left. - ik \frac{a_{12}}{a_{22}} E_y \tilde{E}_x + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} E_x \tilde{E}_y \right) dx dy + \\
 & + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \right. \\
 & \quad \left. - ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} E_x + ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} E_y + ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} E_z - \right. \\
 & \quad \left. - ik \frac{a_{21}^*}{a_{22}^*} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} E_z + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \tilde{E}_x - ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \tilde{E}_y + \right. \\
 & \quad \left. + ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_y}{\partial x} \tilde{E}_z - ik \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tilde{E}_z - k^2 \frac{\Delta}{a_{22}} E_x \tilde{E}_x - \right. \\
 & \quad \left. - k^2 \frac{\Delta}{a_{22}} E_y \tilde{E}_y - k^2 \frac{\Delta}{a_{22}} E_z \tilde{E}_z \right) dx dy = 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили нелинейную задачу на собственные значения вида

$$\gamma^2 \mathbf{A} \mathbf{X} + \gamma \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C} \mathbf{X} = 0. \quad (9)$$

### Решение задачи методом смешанных конечных элементов

При расчете волноведущих систем методом обычных конечных элементов не все получаемые решения имеют физический смысл и соответствуют реально распространяющимся модам. Для устранения фиктивных решений, называемых часто «духами», применяют следующие подходы:

— апостериорный — истинные моды отделяют от фиктивных после процесса вычислений;

— априорный — используются такие постановки задач, при которых фиктивные решения не возникают.

Одним из наиболее эффективных методов борьбы с нефизическими решениями является использование в методе конечных элементов смешанных

конечных элементов [3]. Этим и обуславливается выбор данного метода для формирования матриц  $A, B, C$  в задаче (9).

Разложим поля по базисным функциям

$$E_x = \sum_{ij} E_{ij}^x N_j(y) p_{i,i+1}(x), \quad (10)$$

$$E_y = \sum_{ij} E_{ij}^y N_i(x) p_{j,j+1}(y), \quad (11)$$

$$E_z = \sum_{ij} E_{ij}^z N_i(x) N_j(y), \quad (12)$$

где

$$N_k(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\Delta \xi}, & \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}), \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\Delta \xi}, & \xi \in (\xi_{k-1}, \xi_k), \end{cases}$$

$$p_{k,k+1}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}), \\ 0, & \xi \notin (\xi_k, \xi_{k+1}), \end{cases} \quad k = i, j, \quad \xi = x, y.$$

Подставим (10)–(12) в систему уравнений (8), тогда полученные интегралы перекрытия будут иметь простой вид и могут быть легко рассчитаны численно.

Нелинейную задачу на собственные значения (9), где  $\mathbf{X} = \{E_x^1 \ E_x^2 \ \dots \ E_y^1 \ \dots \ E_z^1 \ \dots\}^T$ ,  $T$  — знак транспонирования,  $E_k^i$  — значение  $k$ -й компоненты поля в  $i$ -м узле,  $k = (x, y, z)$ , сведем к линейной, введя дополнительный неизвестный собственный вектор  $\mathbf{Y} = \gamma \mathbf{X}$ . В результате получим задачу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Задача (13) — это обобщенная задача на собственные значения  $DZ = \gamma GZ$ . Она решается обращением матрицы  $G$ , которая является вырожденной вследствие вырожденности матрицы  $A$ . Чтобы избежать этого, сделаем замену переменных  $\lambda = 1/\gamma$ , тогда матрицы  $C$  и  $A$  поменяются местами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

причем матрица  $C$  — невырожденная, что видно из постановки задачи, и, следовательно, в задаче на собственные значения обе матрицы становятся невырожденными.

Условия для компонент полей в граничных узлах учтем явно.

### Численные результаты

Для заполнения комплексных матриц  $A, B, C$  и нахождения собственных значений  $\gamma$  был разработан и реализован алгоритм на языке FORTRAN. В качестве тестовой задачи проводились

расчеты для нахождения постоянной распространения первой моды диэлектрического волновода ( $a_{11} = a_{22} = (1., 0.)$ ,  $a_{12} = a_{21} = (0., 0.)$ ) для различных значений волновых чисел. Результаты сравнивались с аналитическим решением. Известно, что собственные функции, определяющие поле волны ТЕ ( $E_z = 0$ ) в прямоугольном волноводе, имеют вид  $A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right)$ , а собственные значения  $\alpha_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$ . Одно из двух чисел  $m$  и  $n$  может быть равно нулю. Волна типа ТЕ<sub>10</sub> является основной волной прямоугольного волновода (имеет наибольшую критическую длину волны).

В программе рассчитывались значения постоянной распространения  $\beta = \sqrt{k^2 - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$  ( $\gamma = i\beta$ ).

Все расчеты выполнялись для 16 элементов. Из рис. 1 видно, что уже для выбранного числа элементов достигается хорошая точность.

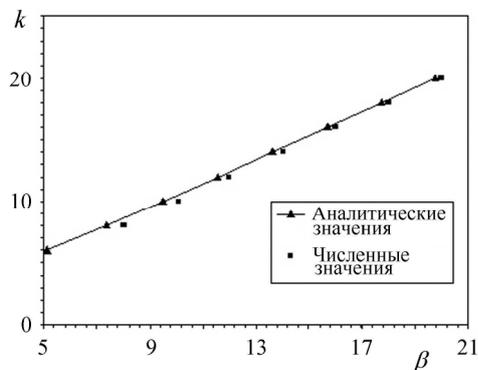


Рис. 1. Дисперсионная диаграмма для основной моды ТЕ<sub>10</sub> прямоугольного диэлектрического волновода

Была проведена серия расчетов для нахождения постоянных распространения кирального прямоугольного волновода, по результатам которых были построены дисперсионные кривые, одна из которых представлена на рис. 2.

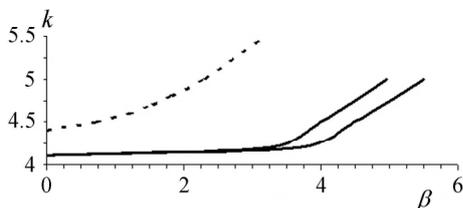


Рис. 2. Дисперсионная диаграмма прямоугольного волновода с киральным заполнением.  $a_{11} = a_{22} = (1., 0.)$ ,  $a_{12} = a_{21}^* = (0.0, 0.001)$ . Пунктирная кривая соответствует ТМ<sub>11</sub> моде в некиральном случае

Видно, что киральная мода, у которой существуют ТМ- и ТЕ-аналоги в некиральном случае, расщепляется на две ветви с различными постоянными распространения. Частоты отсечки для двух

ветвей — одинаковые. Это явление носит название бифуркации мод. Заметим также, что частоты отсечки в киральном случае меньше, чем в некиральном.

Кроме того, рассматривалось влияние геометрических параметров волновода на значение постоянной распространения первой невырожденной моды. Оказалось, что размер сторон волновода влияет на значение постоянной распространения незначительно. В таблице представлены результаты расчета для параметра киральности 0.001 и волнового числа 10. Сторона  $b$  была равна 100 во всех расчетах.

#### Зависимость постоянной распространения от длины стороны прямоугольного волновода

$N$	$a$	$\beta$
1	1	9.9
2	10	9.8
3	100	9.9
4	200	9.9
5	300	9.9
6	400	10.0

Отметим, что аналогичный результат по стабилизации значения постоянной распространения был получен в работе [2] методом Галеркина.

#### Заключение

Таким образом, показано, что метод смешанных конечных элементов может эффективно применяться для расчета прямоугольного волновода с киральным заполнением. В работе показано, что уже для 16 конечных элементов достигается хорошая точность. С помощью данного метода удастся выявить основные характерные особенности киральных волноводов.

Написанная на языке FORTRAN программа для расчета постоянной распространения прямоугольного кирального волновода позволяет вести расчет не только для различных значений параметра киральности, но и для более общего случая биизотропных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06.01.00146).

#### Литература

1. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. // Журн. радиоэлектроники РАН. Математические методы в задачах радиоэлектроники. 2005. № 7. С. 1 (<http://jre.cplire.ru>).
2. Моденов В.П., Ромашин А.В., Цветков И.В. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2002. 5, № 2. С. 56.
3. Raviart P.A., Thomas J.M. // Mathematics of Computation. 1977. 31, N 138. P. 391.

Поступила в редакцию  
06.12.06