

УДК 621.372.2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СМЕШАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВОЛНОВОДНОЙ ДИФРАКЦИИ

А. Н. Боголюбов, А. В. Лаврёнова
(кафедра математики)

Построен и реализован алгоритм численного расчета векторной задачи дифракции на неоднородности в волноводе методом смешанных конечных элементов. Для ограничения области используются парциальные условия излучения.

Введение

В наших работах [1–3] рассмотрено решение скалярной задачи дифракции на неоднородности в волноводе с применением метода конечных элементов и использованием парциальных условий излучения для ограничения области, в которой ищется решение. Скалярная постановка содержит в себе основные моменты, связанные с использованием проекционно-сеточных методов при решении волноводных задач дифракции, однако в ней не проявляются свойства, резко снижающие эффективность численных алгоритмов, — появление фиктивных решений, не имеющих физического смысла, так называемых «духов». Подобные решения возникают в векторных постановках волноводных задач дифракции [4].

Существенным моментом при этом является наличие у оператора типа «ротор-ротор» $\text{rot} \varepsilon^{-1} \text{rot}$ нулевого собственного значения бесконечной кратности. При использовании метода конечных элементов с классическими лагранжевыми конечными элементами электромагнитное поле аппроксимируется набором непрерывных функций. Дискретизация задачи приводит к тому, что нулевое собственное значение переходит в семейство ненулевых собственных значений, которым в качестве собственных функций соответствуют фиктивные решения. Заметим, что при использовании лагранжевых конечных элементов нулевые собственные значения являются не единственной точкой спектра, порождающей фиктивные решения [5].

Существует целый ряд методов борьбы с нефизическими решениями, которые можно разделить на два больших класса: апостериорные и априорные [4, 5]. Апостериорные методы представляют собой различные способы выделения и отсеивания фиктивных решений. Они весьма трудоемки и зачастую малоэффективны. Обычно используется метод проверки выполнения дивергентного уравнения, которое нарушается для фиктивных решений.

Априорные методы предполагают использование таких формулировок исходной задачи, при которых исключалось бы появление фиктивных решений

или, по крайней мере, определенных их видов. Здесь можно отметить несколько основных подходов. Первый состоит в явном включении уравнений дивергентного типа в систему решаемых уравнений. В качестве примера приведем популярный в свое время метод штрафного функционала, в котором необходимые условия учитывались с помощью неопределенных множителей Лагранжа, что приводит к нелинейной задаче минимизации. Штрафной параметр выбирался, как правило, экспериментально. При таком приближенном выборе штрафного параметра эффективность исключения нефизических решений была невысокой, что наряду со значительной трудоемкостью привело к тому, что в настоящее время метод штрафного функционала практически не применяется. Второй подход заключается в том, что с помощью дивергентного уравнения исключается продольная компонента магнитного вектора и ставится задача относительно поперечных координат. Основным недостатком, резко снижающим эффективность данного подхода, является потеря разреженности матриц, возникающих при использовании метода конечных элементов.

Наиболее предпочтительным с нашей точки зрения является подход, заключающийся в таком способе дискретизации исходной задачи, при котором нулевое собственное значение аппроксимируется точно. Нулевое собственное значение отбрасывается либо после вычислений, либо исключается каким-либо алгебраическим способом уже в дискретной задаче. В этом плане весьма перспективным является использование смешанных конечных элементов [6], поскольку на их основе возможно построение алгоритмов, в которых нулевое собственное значение вычисляется точно. Отметим также следующий момент. Приближенное решение u_h исходной задачи получается как решение, принадлежащее конечномерному кусочно-полиномиальному пространству, принадлежность к которому в случае применения лагранжевых конечных элементов требует непрерывности функции u_h .

Таким образом, при применении лагранжевых конечных элементов решение дискретной задачи

ищется на множестве непрерывных функций, в то время как решение исходной дифференциальной задачи может допускать разрывы. Например, если рассмотреть спектральную задачу относительно магнитных компонент, в которой роль собственного значения играет квадрат волнового числа, то ее решение задается на множестве вектор-функций, удовлетворяющих условию $\text{rot } H \in L_2$, т. е. функций, допускающих разрывы нормальной составляющей поля, где нормаль проведена к ребру конечного элемента.

В настоящей работе решается задача дифракции электромагнитной волны на неоднородности в волноводе с использованием смешанных конечных элементов.

Постановка задачи

Запишем математическую постановку векторной задачи дифракции электромагнитных волн на локальной неоднородности в волноводе без поглощения (двумерный случай). Стенки бесконечного волновода предполагаются идеально проводящими. Пусть ось z введенной декартовой системы координат направлена по оси волновода, а ось x — перпендикулярно оси z . В связи с решением задачи дифракции на неоднородности в волноводе рассматривается задача для уравнения

$$\text{rot } \varepsilon^{-1} \text{rot } H - k^2 H = 0, \quad \text{div } H = 0 \quad (1)$$

в области $\Omega = \{z \in (-\infty, \infty); x \in [0, 1]\}$ с однородными граничными условиями на боковой поверхности волновода при $x = 0$ и $x = 1$:

$$[\text{rot } H \times n] = 0, \quad (2)$$

где H — поле с компонентами: $H = \{H_z, H_x\}$, $\varepsilon(z)$ — диэлектрическая проницаемость, имеющая вид

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z < z_1, \quad z > z_2, \\ \varepsilon \geq 1, & z_1 < z < z_2, \end{cases} \quad (3)$$

k — волновое число.

Область $D = \{z \in (z_1, z_2); x \in [0, 1]\}$, в которой заключена неоднородность заполнения, ограничена сечениями $S_1 = \{z = z_1; x \in [0, 1]\}$ и $S_2 = \{z = z_2; x \in [0, 1]\}$. На этих сечениях ставятся парциальные условия излучения [7].

Ищем решение в виде $H = \text{rot } \chi$, где $\text{rot } \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} e_z - \frac{\partial \chi}{\partial z} e_x$. Для нахождения собственных функций для χ , по которым можно разложить искомое решение, рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta \chi + k^2 \chi = 0$$

в области $D = \{z \in (z_1, z_2); x \in [0, 1]\}$,

$$(\text{rot } \chi \cdot e_x)|_{x=0, x=1} = 0.$$

Решение данной задачи записывается в виде

$$\chi_n(z, x) = \sin(\pi n x) e^{\pm i \gamma_n z}. \quad (4)$$

Общее решение вспомогательной задачи имеет вид

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin(\pi n x) e^{i \gamma_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin(\pi n x) e^{-i \gamma_n z}, \quad (5)$$

где T_n и R_n — модовые коэффициенты прохождения и отражения.

Пусть для определенности падающая волна является первой модой волновода с амплитудой C_1 , т. е. $\chi_1 = C_1 \sin(\pi x) e^{i \gamma_1 z}$. В общем случае можно разложить падающую волну в ряд Фурье по модам волновода $\chi_n(z, x)$. Тогда искомое поле можно получить как сумму решений для всех мод с соответствующими коэффициентами.

Используя полученное общее решение (5), можно выписать условия излучения для χ . Учитывая условия излучения, можно написать:

при $z \leq z_1$

$$\chi = C_1 \sin(\pi x) e^{i \gamma_1 z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin(\pi n x) e^{-i \gamma_n z}; \quad (6)$$

при $z \geq z_2$

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin(\pi n x) e^{i \gamma_n z}. \quad (7)$$

Для применения метода конечных элементов нам понадобится обобщенная постановка задачи (1)–(3), (6)–(7). Предположим, что H — решение данной задачи. Умножим уравнение (1) на достаточно гладкую векторную функцию H^* и проинтегрируем по области D .

После преобразований и использования выражения для коэффициентов C_1 , R_n и T_n обобщенная постановка задачи примет вид

$$\int_D \varepsilon^{-1} \text{rot } H_{\perp} \text{rot } H_{\perp}^* dz dx - \int_D k^2 (H^*, H) dz dx - 2i \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n + \frac{\pi^2 n^2}{\gamma_n} \right) (H_x, \sin \pi n x)_{S_1} (H_x^*, \sin \pi n x)_{S_1} - 2i \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n + \frac{\pi^2 n^2}{\gamma_n} \right) (H_x, \sin \pi n x)_{S_2} (H_x^*, \sin \pi n x)_{S_2} = -2B \varepsilon^{-1} (\gamma_1^2 + \pi^2) e^{i \gamma_1 z_1} (H_x^*, \sin \pi x)_{S_1}. \quad (8)$$

Алгоритм построения решения задачи

Для решения векторной задачи дифракции электромагнитных волн на локальной неоднородности в волноводе без поглощения используем метод смешанных конечных элементов. Для аппроксимации поля H_z будем использовать функции $N_j(x) p_{i,i+1}(z)$, для аппроксимации H_x — функции $N_i(z) p_{j,j+1}(x)$, где $N_i(x)$ — функция-крышка, равная единице в i -м узле, кусочно-линейная на отрезках $[(i-1)h_x, ih_x]$ и $[ih_x, (i+1)h_x]$ и равная нулю вне отрезка $[(i-1)h_x, (i+1)h_x]$, а $p_{i,i+1}(x)$ — функция-сту-

пенька, равная единице на отрезке $[ih_x, (i+1)h_x]$ и нулю всюду, за исключением следующего отрезка:

$$\begin{pmatrix} H_z \\ H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j} H_{z_{ij}} N_j(x) p_{i,i+1}(z) \\ \sum_{i,j} H_{x_{ij}} N_i(z) p_{j,j+1}(x) \end{pmatrix}.$$

Для удобства мы обозначили функции для H_z : $N_j(x)p_{i,i+1}(z) = N_i(z, x)$, а для H_x : $N_i(z)p_{j,j+1}(x) = M_j(z, x)$, $i \in [1, N_x(N_z + 1)]$; $j \in [1, N_z(N_x + 1)]$.

Подставляем в вариационную постановку задачи (8) H_z и H_x в виде сумм: $H_z = \sum H_{z_{ij}} N_i(z, x)$ и $H_x = \sum H_{x_{ij}} M_j(z, x)$.

В качестве H^* мы можем брать любую функцию, удовлетворяющую граничным условиям. Будем последовательно подставлять в качестве H^* конечные элементы N_i (для H_z^*) и M_j (для H_x^*). Получим множество уравнений, линейных по коэффициентам $H_{z_{ij}}$ и $H_{x_{ij}}$. Таким образом, задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей A и столбцом правых частей B . Матрица системы квадратная, ее размерность — количество всех функций N_i и M_j , т.е. для прямоугольника

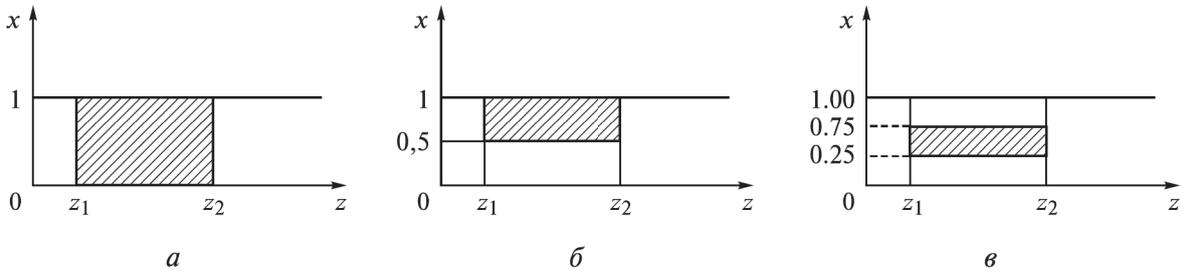


Рис. 1. Волноводы со вставками в виде «пробки» (а), в верхней половине волновода (б), посередине волновода (в)

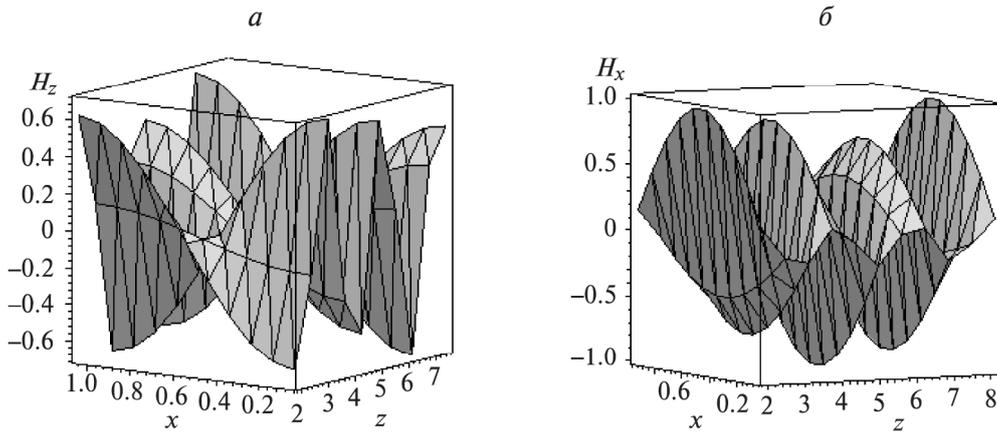


Рис. 2. Распределение поля в волноводе со вставкой в виде «пробки» с $\varepsilon = 2$: компонента H_z поля H (а), компонента H_x поля H (б)

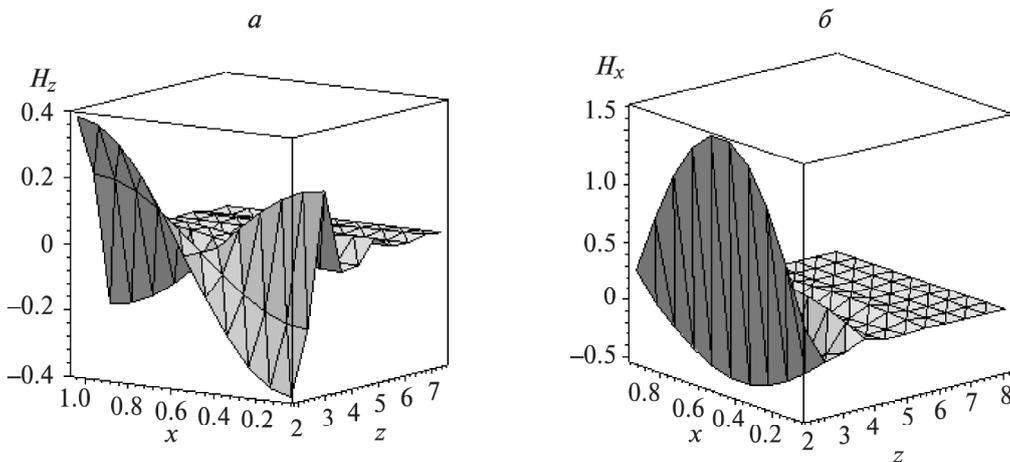


Рис. 3. Распределение поля в волноводе со вставкой в виде «пробки» с $\varepsilon = 2 + i$: компонента H_z поля H (а), компонента H_x поля H (б)

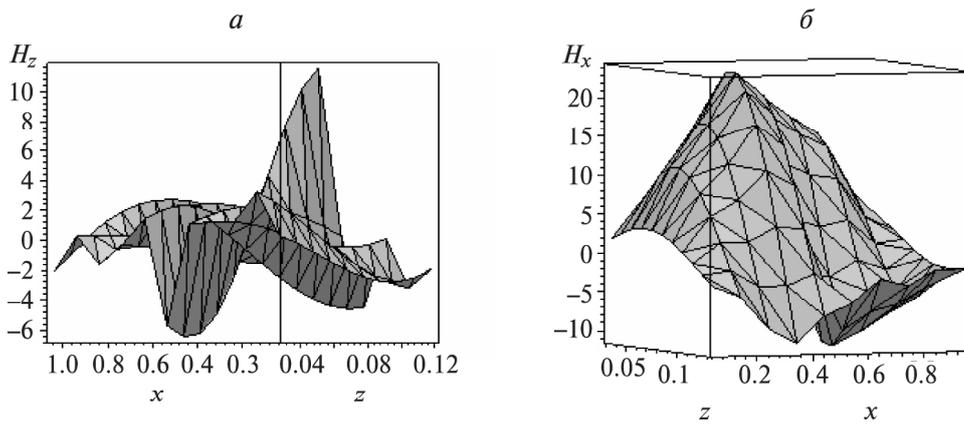


Рис. 4. Распределение поля в волноводе со вставкой ($\epsilon = 2 + i$) в верхней половине волновода: компонента H_z поля H (а), компонента H_x поля H (б)

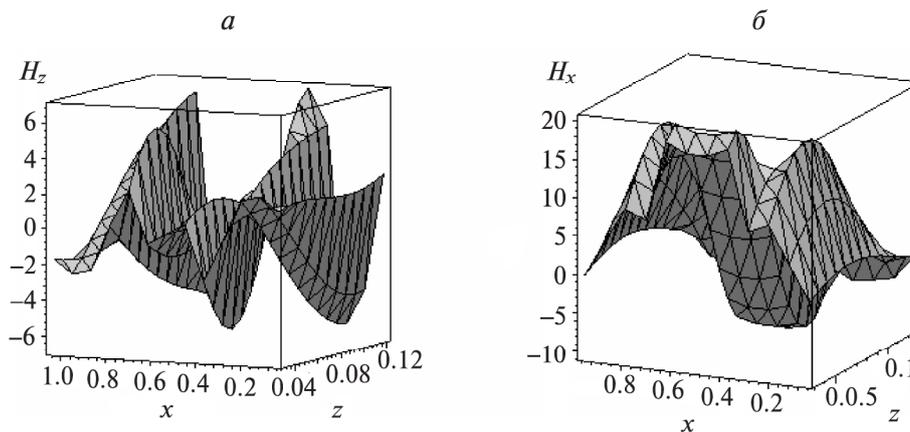


Рис. 5. Распределение поля в волноводе со вставкой ($\epsilon = 2 + i$) в центральной части волновода: компонента H_z поля H (а), компонента H_x поля H (б)

с сеткой $N_z \times N_x$ размерность матрицы A равна $N_x(N_z + 1) + N_z(N_x + 1)$.

Отметим, что A — симметричная, разреженная матрица. Это обстоятельство сильно упрощает как процесс построения матрицы, так и решение получившейся системы линейных алгебраических уравнений $u = B$.

Результаты

Результаты решения задачи представлены для нескольких видов неоднородности. В качестве падающей волны берется первая собственная волна, т. е. $\chi_1 = C_1 \sin(\pi x) e^{i\gamma_1 z}$, которая распространяется вдоль оси z в положительном направлении. По оси, перпендикулярной плоскости (z, x) , отложены вещественные части H_z и H_x компонент поля H .

Распределение поля в волноводе, когда неоднородность имеет вид «пробки», т. е. при $x \in (0, 1)$, $z \in (z_1, z_2)$, $\epsilon = 2$ (рис. 1, а), представлено на рис. 2. Из рисунка видно, что в отсутствие поглощения амплитуда практически не изменяется. Четко видно влияние поглощения на изменение амплитуды, распространяющейся по волноводу волны на рис. 3 (в данном случае $\epsilon = 2 + i$). Введение сильного

поглощения ($\text{Im } \epsilon / \text{Re } \epsilon = 1/2$) приводит к значительному ослаблению интенсивности поля (здесь $\text{Im } \epsilon$ — мнимая часть диэлектрической проницаемости, а $\text{Re } \epsilon$ — ее вещественная часть).

На рис. 4 показана картина распределения поля в волноводе в случае расположения неоднородности в верхней половине волновода: $x \in (1/2, 1)$, $z \in (z_1, z_2)$, $\epsilon = 2 + i$ (рис. 1, б). При наличии такой несимметрично расположенной вставки появляется эффект стягивания поля в область с большей оптической плотностью. Поглощение в данном случае является причиной относительного выравнивания амплитуды поля в области неоднородности.

На рис. 5 показана картина распределения поля в волноводе в случае расположения неоднородности посередине волновода, $\epsilon = 2 + i$ (рис. 1, в). Четко видно, что при прохождении волны по волноводу поле концентрируется в центральной области.

Заключение

Приведенные результаты показывают, что использование смешанных конечных элементов позволяет строить экономичные численные алгоритмы,

исключающие появление фиктивных, нефизических решений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00146).

Литература

1. Лавренова А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. № 1. С. 22.
2. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Лавренова А.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2004. **9**, № 8. С. 22.
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Лавренова А.В. // Радиотехника. 2004. № 12. С. 20.
4. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39.
5. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С. 9 (Moscow University Phys. Bull. 1996. N 1).
6. Raviart P.A., Thomas J.M. // Mathematics of Computation. 1977. **31**, N 138. P. 391.
7. Свешников А.Г. Принцип излучения // ДАН СССР. 1950. **3**, № 5. С. 517.

Поступила в редакцию
13.09.06