

УДК 539.12.01

ЭФФЕКТЫ НАРУШЕНИЯ СРТ- И ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМАХ

В. Ч. Жуковский, О. Г. Харланов

(кафедра теоретической физики)

E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

В настоящей работе исследуется приближенное решение уравнения Дирака для электрона в центральном потенциале, в частности в потенциале Кулона, в случае нарушения лоренц-инвариантности. Выведено квазирелятивистское приближение для уравнения Дирака во внешнем поле. Получена асимметрия диаграммы направленности спонтанного излучения для поляризованного атома водорода.

Введение

Стандартная модель на сегодняшний день имеет множество экспериментальных подтверждений. Однако она не включает в себя квантовое описание гравитационного взаимодействия. Методы квантования, принятые в стандартной модели, не позволяют произвести непротиворечивое квантование ОТО — полученная теория оказывается неперенормируемой. Поэтому остается открытым вопрос о том, какая теория описывает физику на планковских масштабах, где существенными становятся эффекты квантовой гравитации. В то же время существуют кандидаты на роль такой теории, удовлетворяющие принципу соответствия по отношению как к ОТО, так и к стандартной модели, например теория суперструн.

Планковские энергии пока экспериментально недостижимы, поэтому для исследования таких теорий при низких энергиях была разработана расширенная стандартная модель (SME) — эффективная теория, формулируемая в виде набора поправок к стандартной модели, ограниченного «естественными» требованиями [1, 2], такими, как локальная $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочная инвариантность, унитарность, перенормируемость, сохранение энергии-импульса и т. п. Каждая поправка включает в себя (псевдо)тензорную константу (SME-константу), свернутую с полями из стандартной модели и их производными. Наличие ненулевых значений SME-констант в вакууме приводит к нарушению лоренц-инвариантности и СРТ-четности.

Недавно было показано [3–6], что фундаментальные теории за рамками стандартной модели допускают спонтанное нарушение лоренц-инвариантности, приводя к одному из вариантов SME. Поэтому исследование SME является опосредованным исследованием этих фундаментальных теорий.

Весьма перспективным является изучение следов нарушения СРТ-четности и лоренц-инвариантности в атомах, которое может приводить, например, к на-

рушению пространственной четности. Это явление имеет место и в рамках стандартной модели, где его вызывает слабое взаимодействие [7–11]. В результате становятся возможными такие эффекты, как резонансный дихроизм газа, разрешение ранее запрещенных атомных переходов и т. д. Похожие эффекты естественно ожидать и в рамках SME.

Тем не менее до сих пор исследования атома в основном касались спектроскопических предсказаний с использованием теории возмущений по SME-поправкам [12–15]. Прямое решение задачи о собственных состояниях атома позволило бы исследовать также его радиационные свойства. В настоящей работе производится приближенное решение этой задачи и в качестве примера рассматривается эффект асимметрии диаграммы направленности спонтанного излучения поляризованного атома водорода.

1. Используемая модель

Мы будем работать в рамках расширенной электродинамики электронов и фотонов с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_e - b_\mu\gamma^\mu\gamma_5)\psi, \quad (1)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x), \quad (2)$$

где e , m_e — заряд и масса электрона, $x^\mu \equiv \{ct, \mathbf{r}\}$, а b^μ — СРТ-нечетный постоянный псевдовектор. Современные оценки для b_μ для электрона имеют вид [13, 15, 16]

$$|b_0| \lesssim 10^{-2} \text{эВ}, \quad (3)$$

$$|\mathbf{b}| \lesssim 10^{-19} \text{эВ}, \quad (4)$$

а для нуклонов оценки b_μ строже на несколько порядков. Будем использовать одночастичное приближение для электрона, т. е. релятивистскую квантовую механику. Из лагранжиана (1) можно получить гамильтониан электрона во внешнем поле

$$\hat{H}(t) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m_e + eA_0(\hat{\mathbf{r}}, t) + b_0\gamma_5 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Sigma}, \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{P}} \equiv \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)$. Введем оператор P -четности в спинорном представлении

$$\hat{P}\xi(\mathbf{r}, t) \equiv \gamma^0\xi(-\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

тогда $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$, $\hat{P}^\dagger\hat{P} = \hat{P}^2 = 1$. Гамильтониан (5) коммутирует с этим оператором, когда $A_0(\mathbf{r}, t) = A_0(-\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(-\mathbf{r}, t)$ и $b_0 = 0$. Например, константа b_0 нарушает P -четность гамильтониана (5) в центрально-симметричном поле $A^\mu = \{\phi(r), \mathbf{0}\}$, в частности в кулоновском поле ядра

$$\phi(r) = -\frac{Ze}{4\pi r}. \quad (7)$$

Зарядовое сопряжение гамильтониана (5) приводит лишь к замене знака заряда e на противоположный, поэтому атомы водорода и антиводорода обладают эквивалентной динамикой даже при $b_\mu \neq 0$. В силу сказанного выше основной наш интерес касается исследования новых свойств атома водорода, обусловленных $b_0 \neq 0$.

2. Квазирелятивистское приближение в уравнении Дирака при $b_\mu \neq 0$

В этом разделе мы будем разлагать уравнение Дирака в ряд по $1/c$ до второго порядка малости, поэтому запишем гамильтониан в единицах СГС, где константа c не равна единице:

$$\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}} + \beta m_e c^2 + eA_0 + cb_0\gamma_5 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Sigma}, \quad (8)$$

а $\hat{\mathbf{P}} \equiv \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)$. Как видим, b_0 выбран имеющим размерность импульса. Это сделано для того, чтобы вклады в $\hat{H}\psi$, содержащие b_0 и \mathbf{b} , были одного порядка по $1/c$. Рассмотрим нестационарное уравнение Дирака в нестационарном внешнем поле $A_\mu(x)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

$$\int \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) d^3r = 1. \quad (10)$$

Наш вывод будет аналогичен представленному в [17, § 33]. Для начала примем энергию покоя $m_e c^2$ за нуль энергии, сделав унитарное преобразование

$$\psi = \exp\left\{-i\frac{m_e c^2}{\hbar}t\right\} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тогда получается система уравнений на спиноры u и v :

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} & c\hat{\Lambda} \\ c\hat{\Lambda} & \hat{\lambda} - 2m_e c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (12)$$

$$\hat{\Lambda} \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}} - b_0, \quad \hat{\lambda} \equiv eA_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (13)$$

Будем считать, что электрон находится в положительно-частотном состоянии, а внешние поля доста-

точно слабы, так что $\hat{\mathbf{P}} = O(c^0)$, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 = O(c^0)$ при действии на u, v . Тогда вторая строка (12) дает

$$v = \frac{1}{2m_e c} \left(1 + \frac{\hat{\lambda}}{2m_e c^2}\right) \hat{\Lambda} u + O(1/c^4). \quad (14)$$

Введем двухкомпонентный спинор $\Phi(x) \in \mathbb{C}^2$, чтобы сохранить норму:

$$\Phi(x) \equiv \left(1 + \frac{\hat{\Lambda}^2}{8m_e^2 c^2}\right) u, \quad (15)$$

$$\int \psi^\dagger \psi d^3r = \int \Phi^\dagger \Phi d^3r + O(1/c^3). \quad (16)$$

При этом, вообще говоря, «плотность вероятности» $\Phi^\dagger \Phi$ отличается от $\psi^\dagger \psi$ на слагаемое порядка $1/c^2$, представляющее собой полную дивергенцию, что является следствием наличия отрицательно-частотных состояний (так называемых *Zitterbewegung*).

Выражая теперь u и v через Φ с использованием (14) и (15), запишем верхнюю строку (12):

$$0 = \hat{\lambda}u + c\hat{\Lambda}v = \left\{ \hat{\lambda} + \frac{1}{2m_e} \hat{\Lambda} \left(1 + \frac{\hat{\lambda}}{2m_e c^2}\right) \hat{\Lambda} \right\} \times \\ \times \left(1 - \frac{\hat{\Lambda}^2}{8m_e^2 c^2}\right) \Phi + O(1/c^3). \quad (17)$$

Записывая это уравнение сначала в $1/c$ -приближении, выразим $\hat{\lambda}\Phi$ через $\hat{\Lambda}\Phi$ и подставим результат обратно в (17), тогда получится уравнение Дирака в $1/c^2$ -приближении при $b_\mu \neq 0$:

$$\left\{ \hat{\lambda} + \frac{\hat{\Lambda}^2}{2m_e} \left(1 - \frac{\hat{\Lambda}^2}{4m_e^2 c^2}\right) - \frac{1}{8m_e^2 c^2} [[\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}], \hat{\Lambda}] \right\} \Phi = \\ = O(1/c^3). \quad (18)$$

Коммутатор $[[\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}], \hat{\Lambda}]$ не содержит оператора $\partial/\partial t$, так что в последнем уравнении производная по времени содержится только в первом слагаемом. Это позволяет записать квазирелятивистский гамильтониан

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{h}\Phi, \quad (19)$$

$$\hat{h} = \frac{\hat{\Pi}^2}{2m_e} \left(1 - \frac{\hat{\Pi}^2}{4m_e^2 c^2}\right) - \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b} + eA_0 - \\ - \frac{e\hbar}{4m_e^2 c^2} \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{E}\hat{\mathbf{P}}] - \frac{e\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \text{div } \mathbf{E} - \frac{\boldsymbol{\sigma} [\hat{\mathbf{P}}[\mathbf{b}\hat{\mathbf{P}}]]}{2m_e^2 c^2}, \quad (20)$$

$$\hat{\Pi}^2 \equiv \hat{\mathbf{P}}^2 - 2b_0^2 \equiv \hat{\mathbf{P}}^2 + b_0^2 - 2b_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}}, \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv \hat{\mathbf{P}} - b_0 \boldsymbol{\sigma}. \quad (22)$$

Этот гамильтониан эрмитов, а соответствующее уравнение локально калибровочно-инвариантно.

В $1/c$ -приближении получается уравнение Паули, позволяющее найти выражение для тока и плотности вероятности

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_P}{\partial t} = \hat{h}_P \Phi_P, \quad (23)$$

$$\hat{h}_P = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_e} - \frac{b_0^2}{m_e} - \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} + eA_0 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b}, \quad (24)$$

$$j_P^\mu = \left\{ c\Phi_P^\dagger \Phi_P, \frac{1}{2m_e} \left(\Phi_P^\dagger (\hat{\mathbf{P}}\Phi_P) + (\hat{\mathbf{P}}\Phi_P)^\dagger \Phi_P \right) - \frac{b_0}{m_e} \Phi_P^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi_P \right\}, \quad (25)$$

т.е. к току вероятности при $b_\mu = 0$ появляется добавка, зависящая от спина. Полученные результаты совпадают в своих частных случаях с изложенными в [18] и [19]. В первой публикации методом Фолди–Вутхаузена был получен нерелятивистский гамильтониан для свободного электрона с учетом всевозможных SME-поправок в фермионном секторе. Во второй исследовалось $1/c$ -приближение во внешнем поле.

3. Водородоподобный атом.

Квазирелятивистский подход

Рассмотрим сначала гамильтониан Паули в линейном приближении по b_μ :

$$\hat{h}_P = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - b_0 \boldsymbol{\sigma})^2}{2m_e} + eA_0 - \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b}. \quad (26)$$

Совершим унитарное преобразование:

$$\Phi_P \rightarrow \Phi'_P = \hat{U}_P \Phi_P, \quad (27)$$

$$\hat{h}_P \rightarrow \hat{h}'_P = \hat{U}_P \hat{h}_P \hat{U}_P^\dagger = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m_e} + eA_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{H} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}, \quad (28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} + \hat{\boldsymbol{\mu}}_A, \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}_A \equiv \frac{eb_0}{m_e c} [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}], \quad (29)$$

$$\hat{U}_P \equiv \exp \left\{ -\frac{ib_0}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r} \right\}. \quad (30)$$

Как видим, появилась добавка к оператору магнитного момента электрона, приводящая к появлению у электронной оболочки анапольного магнитного момента [7]. Более подробно обсудим этот вопрос ниже.

Пусть $A^\mu = \{\phi(r), \mathbf{0}\}$ и $\mathbf{b} = \{0, 0, b_3\}$, где $\phi(r)$ — потенциал ядра. Тогда получаются собственные состояния и спектр невозмущенного гамильтониана:

$$(\Phi'_P)_{nlm_l m_s}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{l, m_l}(\mathbf{r}/r) \chi_{m_s}; \quad (31)$$

$$(\Phi_P)_{nlm_l m_s}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{l, m_l}(\mathbf{r}/r) (1 + ib_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \chi_{m_s}; \quad (32)$$

$$E_{nlm_s} = E_{nl}^{(0)} + 2b_3 m_s, \quad (33)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; $l = \overline{0, n-1}$; $m_l = \overline{-l, l}$; $m_s = \pm 1/2$; χ_{m_s} — собственные векторы оператора

z -спина. Здесь $R_{nl}(r)$ и $E_{nl}^{(0)}$ — радиальные части волновых функций и энергия при $b_0 = 0$. Таким образом, в ведущем порядке влияние \mathbf{b} сводится к расщеплению величиной $\lesssim 10^{-4}$ Гц по спиновому квантовому числу. Поэтому далее мы рассмотрим $1/c^2$ -приближение для невозмущенного гамильтониана в кулоновском поле в линейном приближении по $b^\mu = \{cb_0, \mathbf{0}\}$. В этом случае унитарное преобразование сводит задачу к задаче при $b_0 = 0$:

$$\hat{h} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - b_0 \boldsymbol{\sigma})^2}{2m_e} \left(1 - \frac{(\hat{\mathbf{p}} - b_0 \boldsymbol{\sigma})^2}{4m_e^2 c^2} \right) - \frac{Ze^2}{r} + \frac{Ze^2 \hbar^2}{4m_e^2 c^2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{l}}}{r^3} + 2\pi \delta(\mathbf{r}) \right), \quad (34)$$

$$\hat{h} = \hat{U}^\dagger \hat{h}|_{b_0=0} \hat{U}, \quad \hat{U} = \exp \left\{ -\frac{ib_0}{\hbar} \left(1 + \frac{Ze^2}{2m_e c^2 r} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r} \right\}, \quad (35)$$

$$\Phi_{nljm}(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) \left\{ Y_{jm}^l(\mathbf{r}/r) - \frac{\kappa b_0 r}{\hbar} \times \left(1 + \frac{Ze^2}{2m_e c^2 r} \right) Y_{jm}^{l'}(\mathbf{r}/r) \right\}, \quad (36)$$

$$E = E_{nj}^{(0)} = -\frac{Z\alpha^2 m_e c^2}{2n^2} \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right], \quad (37)$$

где $\kappa \equiv (-1)^{\frac{l-l'+1}{2}} = \mp 1$ при $l = j \pm 1/2$, а $l' \equiv 2j - l$. В итоге решение при $b_0 \neq 0$ представлено явно через решение при $b_0 = 0$. В нерелятивистском пределе

$$R_{nlj}(r) \rightarrow R_{nl}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2 a_0^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{(2l+1)}(\rho), \quad (38)$$

где $\rho = 2Zr/na_0$, $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ — первый борковский радиус.

4. Разложение уравнения Дирака по b_0

Рассмотрим теперь случай $b^\mu = \{b^0, \mathbf{0}\}$ и $A^\mu = \{A_0^{(e)}(x) + \phi(r), \mathbf{A}^{(e)}(x)\}$, используя систему единиц Хэвисайда: $\hbar = c = 1$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Зададимся гамильтонианом (5) и преобразуем соответствующее уравнение Дирака с помощью калибровочно-инвариантного унитарного преобразования:

$$\hat{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \hat{H} - i \frac{\partial}{\partial t} = e^{-ib_0 \hat{\Delta}_A} \left(\hat{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{ib_0 \hat{\Delta}_A}; \quad (39)$$

$$\hat{\Delta}_A = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{r} - \frac{i}{m_e} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}} + 1) \gamma^0 \gamma_5, \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = [\mathbf{r} \hat{\mathbf{P}}] = -[\hat{\mathbf{P}} \mathbf{r}]. \quad (41)$$

Будем использовать квадратичное приближение по b_0 , тогда

$$\hat{H} \approx \alpha(\hat{p} - e\mathbf{A}^{(e)}) + \beta m_e + e(\phi + A_0^{(e)}) - \frac{b_0^2}{m_e} \hat{f} \gamma^0 - \hat{\mathbf{d}}_A \mathbf{E}^{(e)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_A \mathbf{H}^{(e)} + H_{\text{int}}^{(2)}[A^{(e)}], \quad (42)$$

где $H_{\text{int}}^{(2)}[A^{(e)}]$ содержит слагаемые второго порядка по b_0 во взаимодействии с внешним полем, а $\hat{f} \equiv \boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{l}} + 1$. Добавочные электрический и магнитный моменты имеют вид

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_A = \frac{eb_0}{m_e} \gamma^0 [\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{r}], \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_A = -i\gamma_5 \hat{\boldsymbol{\mu}}_A = -\frac{ieb_0}{m_e} [\boldsymbol{\gamma} \mathbf{r}]. \quad (44)$$

Как видим, в первом порядке по b_0 отсутствуют нелинейные по полям слагаемые. Кроме того, момент $\hat{\mathbf{d}}_A$ взаимодействует только с внешним электрическим полем, поскольку для центрального поля ядра $\hat{\mathbf{d}}_A \cdot (-\nabla \phi) = 0$. Аналогичное имеет место во всех порядках по b_0 , так как $[\hat{\Delta}_A, \phi(r)] = 0$. По этой же причине вид операторов $\hat{\mathbf{d}}_A$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}}_A$ не зависит от поля $\phi(r)$, в частности, они формально имеют тот же вид для свободного электрона. Тем не менее наш подход применим только для систем с размерами, много меньшими $1/b_0 \gtrsim 10^{-3}$ см.

Пусть $A_\mu^{(e)} = 0$, тогда в центральном потенциале собственные функции можно выбрать в виде

$$\tilde{\psi}_{n_r l j m}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} R_{n_r l j}^{(u)}(r) Y_{lm}^l(\mathbf{r}/r) \\ \kappa R_{n_r l j}^{(v)}(r) Y_{lm}^{l'}(\mathbf{r}/r) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $n_r \equiv n - j - 1/2$ — радиальное квантовое число. Как обычно, квантовое число l определяет четность состояния $P = (-1)^l$. На таких функциях оператор $\hat{f} \gamma^0 \cong \hat{f} \equiv \kappa(j + 1/2)$, тогда получается спектр энергии

$$E = \tilde{E} = E_{n_r l j}^{(0)} - \kappa(j + 1/2) \frac{b_0^2}{m_e} = E_{n_r l j}^{(0)} \pm (j + 1/2) \frac{b_0^2}{m_e} \quad (46)$$

для $l = j \pm 1/2$, при этом радиальные множители $R^{(u,v)}$ имеют тот же вид, что и при $b_0 = 0$. В среднем по любому состоянию (45) операторы $\hat{\mathbf{d}}_A$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}}_A$ равны нулю, поэтому они не дают поправки к энергии в слабых внешних электрическом и магнитном полях. Как видим, возникло дополнительное расщепление по орбитальному квантовому числу

$$\Delta E(j) \equiv E_{n_r, j+1/2, j} - E_{n_r, j-1/2, j} = (2j + 1) \frac{b_0^2}{m_e}. \quad (47)$$

При $j = 1/2$ $\Delta E(j) \lesssim 10^5$ Гц, что на четыре порядка меньше лэмбовского сдвига, однако в отличие от последнего, существующего в основном для s -состояний, расщепление (47) даже растет с увеличением j .

Совершая обратное преобразование, получаем волновые функции собственных состояний в исходном представлении:

$$\psi_{n_r l j m}(\mathbf{r}) = e^{-b_0^2 f^2 / 2m_e^2} e^{-b_0^2 r^2 / 2} \times \begin{pmatrix} R^{(u)} Y_{lm}^l + b_0 \kappa \left(\frac{\hat{f}}{m_e} R^{(v)} - r R^{(u)} \right) Y_{lm}^{l'} \\ \kappa R^{(v)} Y_{lm}^{l'} + b_0 \left(\frac{\hat{f}}{m_e} R^{(u)} + r R^{(v)} \right) Y_{lm}^l \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Из-за примеси шаровых спиноров с другим значением орбитального момента нарушается четность состояний, однако «плотность вероятности» $\psi^\dagger \psi$ остается неизменной. Для кулоновского поля при $b_0 = 0$ спектр и радиальные функции известны [17, § 36] (мы выпишем только дискретный спектр):

$$E_{n_r j}^{(0)} = m_e \left(1 + \left(\frac{Z\alpha}{\gamma + n_r} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} R^{(u)} \\ R^{(v)} \end{matrix} \right\} &= \pm \frac{(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \left(\frac{(m_e \pm E_{n_r j}^{(0)}) \Gamma(2\gamma + n_r + 1) n_r!}{4m_e \frac{Z\alpha m_e}{\lambda} (f + \frac{Z\alpha m_e}{\lambda})} \right)^{1/2} \times \\ &\times e^{-\lambda r} (2\lambda r)^{\gamma-1} \left(\left(f + \frac{Z\alpha m_e}{\lambda} \right) L_{n_r}^{(2\gamma)}(2\lambda r) \pm \right. \\ &\left. \pm (1 - \delta_{n_r, 0}) L_{n_r-1}^{(2\gamma)}(2\lambda r) \right), \quad (50) \end{aligned}$$

$$\lambda \equiv \sqrt{m_e^2 - E_{n_r j}^{(0)2}}, \quad \gamma = \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}. \quad (51)$$

Таким образом, при $b_0 \neq 0$ в кулоновском поле снимается «случайное» вырождение по квантовому числу l даже без учета радиационных поправок к закону Кулона.

5. Излучение атома водорода. Асимметрия диаграммы направленности

В последнем разделе мы приведем пример линейного по b_0 радиационного эффекта, появляющегося в случае $b_0 \neq 0$. Рассмотрим при $b^\mu = \{cb_0, \mathbf{0}\}$ излучение атома водорода ($Z = 1$) в приближении Паули. Сделаем унитарное преобразование (28), тогда единственным членом, содержащим b_0 , останется $-\hat{\boldsymbol{\mu}}_A \cdot \mathbf{H}$. Используя вторично-квантованное выражение для поля фотонов \mathbf{A} в кулоновской калибровке, получим угловое распределение вероятности излучения [20, § 9]

$$\frac{dW_{fi}(\mathbf{k}, \lambda)}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{\omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| e^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}_{fi}(\mathbf{k}) \right|^2 (N_\lambda(\mathbf{k}) + 1), \quad (52)$$

$$|\mathbf{k}| = \omega/c = (E_i - E_f)/\hbar c > 0, \quad \lambda = 1, 2; \quad (53)$$

$$\hat{\mathbf{m}} = e\hat{\mathbf{r}} - \frac{ie}{2} (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times \hat{\boldsymbol{\mu}} \right], \quad (54)$$

где \mathbf{k}, λ — импульс и поляризация фотона, $e^{(\lambda)}$ — вектор поляризации фотона, $N_\lambda(\mathbf{k})$ — число фотонов в моде $\{\mathbf{k}, \lambda\}$, $\langle f |$ и $| i \rangle$ — конечное и начальное

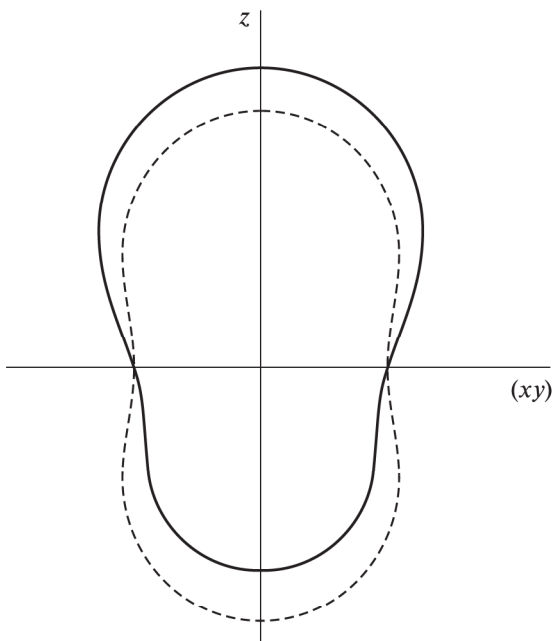
состояния электрона, а оператор магнитного момента $\hat{\mu}$ определяется формулой (29). Далее будем считать $N_\lambda(\mathbf{k}) = 0$, т.е. рассматривать спонтанное излучение.

Излучение, связанное с нарушением четности (далее — $A1$ -излучение), имеет такие же правила отбора, как для $E1$ -излучения, но соответствующий матричный элемент перехода имеет вид, как у $M1$ -излучения. Поэтому $A1$ - и $E1$ -фотоны обладают одинаковой мультипольностью, но разной четностью. Линейные по b_0 поправки к угловому распределению обусловлены интерференцией этих двух типов излучения. После интегрирования по сфере эти вклады исчезают из-за свертки волновых функций фотонов с разной четностью. Это означает, что отсутствуют линейные по b_0 вклады в полную вероятность излучения.

Интерференционное слагаемое не обращается в нуль, например, для перехода $2p_{1/2,1/2} \rightarrow 1s_{1/2,-1/2}$ (в нижнем индексе — полный момент j и его z -проекция m). Расчеты показывают, что после суммирования по $\lambda = 1, 2$ получается следующее распределение вероятности излучения по сфере (Θ — угол между \mathbf{k} и осью z):

$$\frac{dW}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{512\alpha^3 R}{6561\pi} \left\{ 1 + \cos^2 \Theta + \frac{8b_0}{m_e c} \cos \Theta \right\}, \quad (55)$$

где $R = \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2\hbar} \approx 2.07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ — постоянная Ридберга. Как видим, относительная величина нарушения \mathbf{k} -четности распределения имеет порядок $|b_0|/m_e c \lesssim 2 \cdot 10^{-8}$. Распределение (55) изображено на рисунке сплошной кривой, в то время как пунктиром изображено распределение при $b_0 = 0$. Для наглядности взято $b_0/m_e c = 0.05$.



Угловое распределение спонтанного излучения для перехода $2p_{1/2,1/2} \rightarrow 1s_{1/2,-1/2}$

Распределение вероятности для неполяризованных атомов получается после усреднения вероятностей переходов по квантовым числам m, m' . Это распределение является сферически-симметричным (а значит, \mathbf{k} -четным), вследствие ненарушенной при $b_0 \neq 0$ $SO(3)$ -инвариантности. Следовательно, линейные по b_0 слагаемые, являющиеся \mathbf{k} -нечетными, отсутствуют в усредненном распределении вероятности. Обсуждение методов создания поляризованных атомных состояний мы оставим за рамками нашего рассмотрения, ограничившись лишь демонстрацией нового механизма нарушения P -четности в атомных переходах.

Заключение

Итак, мы получили $1/c^2$ -приближение к уравнению Дирака с SME-поправкой b^μ . С помощью разложения релятивистского уравнения Дирака по b_0 исследована задача на собственные состояния электрона в центральном потенциале, решения которой выражены через их вид при $b_0 = 0$, в b_0^2 -приближении. В кулоновском потенциале решения найдены явно. В этом случае возникает квадратичное по b_0 расщепление по квантовому числу l , не исчезающее при больших j . С помощью унитарного преобразования получены также b_0 -поправки к операторам электрического и магнитного дипольного момента электрона, приводящие к появлению у электронной оболочки «анепольного» момента [7]. Наконец, продемонстрировано нарушение центральной симметрии диаграммы направленности спонтанного излучения поляризованного атома водорода, обусловленное нарушением четности из-за наличия ненулевого b_0 .

Литература

1. Colladay D., Kostelecký V.A. // Phys. Rev. 1998. **D58**. P. 116002; hep-ph/9809521.
2. Bluhm R. // hep-ph/0506054.
3. Kostelecký V.A., Samuel S. // Phys. Rev. 1989. **D40**. P. 1886.
4. Andrianov A.A., Soldati R., Sorbo R. // Phys. Rev. 1999. **D59**. P. 025002.
5. Field G.B., Carroll S.M. // Phys. Rev. 2000. **D62**. P. 103008.
6. Shapiro I.L. // Phys. Rept. 2002. **357**. P. 113; hep-th/0103093.
7. Зельдович Я.Б. // ЖЭТФ. 1957. **33**. С. 1531.
8. Curtis Michel F., // Phys. Rev. 1965. **138B**. P. 408.
9. Bouchiat M.A., Bouchiat C.C. // Phys. Lett. 1974. **48B**. P. 111.
10. Новиков В.Н., Хриплович И.Б. // Письма в ЖЭТФ 1975. **22**, № 3. С. 162.
11. Хриплович И.Б. // УФН 1988. **155**, № 2. С. 325.
12. Russell N.E. // hep-ph/9904482.
13. Bluhm R., Kostelecký V.A., Russell N. // hep-ph/9810327; hep-ph/0003223; hep-ph/9810269.

14. *Bluhm R., Kostelecký V.A.* // Phys. Rev. Lett. 2000. **84**. P. 1381.
15. *Bluhm R.* // hep-ph/0006033.
16. *Coleman S., Glashow S.L.* // Phys. Rev. 1999. **D59**. P. 116008; hep-ph/9812418.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 4. Квантовая электродинамика. М., 1989.
18. *Kostelecký V.A., Lane C.D.* // J. Math. Phys. 1999. **40**. P. 6245; hep-ph/9909542.
19. *Ferreira Jr. M.M., Moucherek F.M.O.* // J. Math. Phys. 1999. **40**. P. 6245; hep-ph/9909542.
20. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч.* Квантовая механика. М., 1979.

Поступила в редакцию
27.12.06