УДК 517.958:531.32

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРАТИФИКАЦИИ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

А. Б. Альшин, П. А. Чубенко

(*кафедра математики*)

Рассмотрены внутренняя и внешняя начально-краевые задачи для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0$ в трехмерном случае. Задачи поставлены с граничным условием Дирихле на поверхности из класса Ляпунова. С помощью метода динамических потенциалов доказаны теоремы существования и единственности решения.

Введение

Математические модели различных переходных процессов в изотропных полупроводниках приводят к однотипным задачам для интегродифференциальных и дифференциальных уравнений, родственных эллиптическим [1]. В настоящей работе рассмотрены задачи для одного из таких уравнений, которое представляет собой результат модели, предложенной для теоретического описания явления, наблюдающегося при исследовании переходных процессов в некоторых кристаллических полупроводниках [2, 3]. Наблюдаемый эффект заключался в том, что в первоначально однородном полупроводнике, облученном лазером, после помещения его в постоянное электрическое поле конденсатора наблюдалось образование слоев объемного заряда чередующихся знаков. Причем со временем толщина слоев уменьшалась, а их количество и абсолютная величина плотности заряда в каждом слое увеличивались. Это явление было названо эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

Исходная система уравнений, описывающая переходные процессы в полупроводнике, имеет вид [4]

$$\Delta_3\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \quad \rho^\sigma = \rho - e(n_0 - n), \quad \frac{\partial \rho^\sigma}{\partial t} = e\frac{n_0 - n}{\tau},$$

где ρ — плотность объемного заряда в кристалле; ρ^σ — плотность объемного заряда, связанного на примесных центрах полупроводника; n_0 — равновесная концентрация электронов; n — концентрация свободных электронов, связанная с потенциалом $\varphi(x,t)$ электрического поля законом Больцмана; τ — характерное время жизни свободных электронов; ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника; T_e — температура свободных электронов.

Выписанная система уравнений при начальном условии $\rho^\sigma(x,0) = 0$ в классе функций $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}([0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega))$, где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, редуцируется к одному интегродифференциальному нелинейному уравнению [5]

$$\Delta_3\varphi(x,t) + \frac{4\pi e n_0}{\varepsilon}\left(f(\varphi)(x,t) + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^t f(\varphi)(x,s)\,ds\right) = 0,$$

в котором $f(\varphi) = 1 - \exp(e\varphi/kT_e)$.

В случае если на границе области Ω задано распределение потенциала электрического поля $a(x,t)$, приходим к следующему граничному условию:

$$\varphi_{x\in\partial\Omega} = a(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0,$$

где $a(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times [0,+\infty))$ — заданная функция. При дополнительном условии $|ea(x,t)|/kT_e < 1$ интегродифференциальное уравнение может быть линеаризовано. Если, кроме того, предположить, что $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty); \mathbb{C}^{(2)}(\Omega))$, то в данном расширенном классе гладкости линеаризованное уравнение эквивалентно уравнению в частных производных третьего порядка составного типа, имеющего (после перехода к безразмерным переменным) вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0. \tag{1}$$

В силу физической модели начальные условия при этом должны удовлетворять задаче

$$\begin{cases} \Delta u_0 - u_0 = 0, & x \in \hat{\Omega}, \\ u_0 = a(x,0), & x \in \partial\hat{\Omega}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\hat{\Omega}$ — область безразмерных переменных, соответствующая области Ω.

1. Существование решения

1.1. Случай нулевых начальных данных

Первая внутренняя начально-краевая задача для уравнения стратификации в области $D \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностью Ляпунова S с нулевыми начальными условиями, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) - u = 0, & M \in D, \quad t \in (0,T], \\ u(P,t) = g(P,t), & P \in S, \quad t \in [0,T], \\ u(M,0) = 0, & M \in D. \end{cases} \tag{3}$$

Функцию $g(P,t)$ будем считать непрерывной по P, непрерывно дифференцируемой по t и непрерывно примыкающей к нулевым начальным условиям, а $u(M,t)$ — принадлежащей классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{(2)}(D))$ и непрерывно примыкающей к начальным и граничным условиям.

Задачи, родственные (3), подробно рассмотрены в [6] (например, для случая ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме).

Решение задачи (3) ищется в виде динамического потенциала двойного слоя [7, 8]:

$$u(M,t)=\int\limits_S \mu(Q,t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}\frac{e^{-R_{MQ}}}{R_{MQ}}d\sigma_Q+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_S \mu(Q,t-\tau)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}H(R_{MQ},\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau, \quad (4)$$

где $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}$ — производная по внутренней нормали к поверхности, а функция H задается в виде обратного преобразования Лапласа по формуле

$$H(R_{MQ},\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{\frac{p+1}{p}}R_{MQ}}}{R_{MQ}}-\frac{e^{-R_{MQ}}}{R_{MQ}}\right)e^{p\tau}\,dp. \quad (5)$$

Имеют место следующие 3 леммы.

Лемма 1. *Для функции $H(r,t)$ справедливо представление*

$$H(r,t)=e^{-r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{n-1}}{n!}[\chi(t)^*]^n\delta(t), \quad (6)$$

где $\chi(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T])$.

Лемма 2. *Если $\mu(P,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}(S))$, то динамический потенциал, задаваемый формулой* (4), *удовлетворяет уравнению* (1) *в* $(\mathbb{R}^3\backslash S)\times(0,\infty)$.

Лемма 3. *Скачок на границе S потенциала* (4) *совпадает со скачком потенциала двойного слоя для уравнения Кирхгофа* [9]:

$$\lim_{M\to P\in S}u(M,t)=u(P,t)+2\pi\mu(P,t),\quad M\in D, \quad (7)$$

$$\lim_{M\to P\in S}u(M,t)=u(P,t)-2\pi\mu(P,t),\quad M\in\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}. \quad (8)$$

Для доказательства леммы 1 достаточно воспользоваться разложением в ряд Тейлора функции $\exp\left(-\left(\sqrt{\frac{p+1}{p}}-1\right)r\right)$ по r и учесть свойства преобразования Лапласа. Доказательство лемм 2 и 3 непосредственно вытекает из свойств функции $H(R_{MQ},\tau)$, следующих из представления (6). Таким образом, исходная задача сводится к следующему интегральному уравнению для $\mu(P,t)$, где $P\in S$:

$$2\pi\mu(P,t)+\int\limits_S \mu(Q,t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}\frac{e^{-R_{PQ}}}{R_{PQ}}d\sigma_Q+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_S \mu(Q,t-\tau)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}H(R_{PQ},\tau)\,d\sigma_Q\,d\tau=g(P,t). \quad (9)$$

Уравнение (9) допускает запись в операторной форме:

$$B[\mu](t)+\int\limits_0^t A[\mu](t,\tau)d\tau=g(t). \quad (10)$$

Функции $\mu(P,t)$ и $g(P,t)$ рассматриваются при каждом t как элементы пространства $\mathbb{C}(S)$, а операторы A и B задаются по формулам

$$B[\mu]=2\pi\mu(P,t)+\int\limits_S \mu(Q,t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}\frac{e^{-R_{PQ}}}{R_{PQ}}d\sigma_Q,$$

$$A[\mu]=\int\limits_S \mu(Q,t-\tau)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}H(R_{PQ},\tau)\,d\sigma_Q.$$

Доказательство существования решения уравнения (10) проводится с помощью метода последовательных приближений [10]. Легко заметить, что оператор B совпадает с оператором интегрального уравнения, соответствующего внутренней задаче Дирихле для уравнения Кирхгофа [9],

$$2\pi\nu(P)+\int\limits_S \nu(Q)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}\frac{e^{-R_{PQ}}}{R_{PQ}}d\sigma_Q=f(P).$$

Согласно теории потенциала для эллиптических уравнений [9], последнее имеет единственное решение $\nu(P)$ при любой непрерывной $f(P)$ (выполняется первая часть альтернативы Фредгольма [10]), причем $\nu(P)\in\mathbb{C}(S)$. Следовательно, оператор $B\colon\mathbb{C}(S)\to\mathbb{C}(S)$ имеет ограниченный обратный по теореме Банаха об обратном операторе [11]. Перепишем уравнение (10) в виде

$$\mu=B^{-1}[-\int\limits_0^t A\mu\,d\tau+g].$$

Пусть $\mu=\mu_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mu_n-\mu_{n-1})$, где $\mu_0=B^{-1}g$, $\mu_n=B^{-1}\left(-\int\limits_0^t A\mu_{n-1}\,d\tau+g\right)$. Легко показать, что имеет место оценка, аналогичная соответствующей оценке в теории уравнения Вольтерра 2-го рода [10]:

$$\|\mu_n-\mu_{n-1}\|_{\mathbb{C}(S)}\leqslant\frac{\|B^{-1}\|^{n+1}K^n\beta^n}{n!}t^n,$$

где $K=\max\limits_{t\in[0,T]}\|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_Q}H\|_{\mathbb{C}(S\times S)}\cdot\mathcal{S}$, $\beta=\max\limits_{t\in[0,T]}\|g\|$, а $\mathcal{S}$ — площадь поверхности S. Эта оценка доказывает равномерную сходимость ряда для μ, а следовательно, существование и единственность решения интегрального уравнения (10). При этом оно будет принадлежать нужному классу гладкости (см. лемму 2). Непрерывная дифференцируемость функции $\mu(P,t)$ по временной переменной становится очевидной, если взять производные по t от обеих частей рекуррентного соотношения

$$\mu_{n+1}-\mu_n=-B^{-1}\int\limits_0^t A[\mu_n-\mu_{n-1}]\,d\tau$$

и учесть, что $g(P,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}(S))$. Результатом изложенного является

Теорема 1. *Если функция $g(P,t)$ непрерывна по P, непрерывно дифференцируема по t и $g(P,0)=0$, то существует классическое решение задачи* (3) *в области D, ограниченной поверхностью Ляпунова S.*

Внешняя задача Дирихле с нулевыми начальными данными ставится так же, как и внутреняя, с заменой $D\to\mathbb{R}^3\backslash D$. Единственное отличие — требование регулярности решения на бесконечности, которое в данном случае может быть поставлено в наиболее слабой форме — в виде условия ограниченности: $\exists R_0$ и K: $\forall M$, $R_{M0}>R_0$, $\forall t\in(0,T]$:

$$|u(M,t)|\leqslant K.$$

Доказательство существования решения внешней задачи практически дословно повторяет рассуждения, проведенные для внутренней задачи, лишь вместо формулы (7) нужно воспользоваться формулой (8), что приведет к появлению знака «−» перед $2\pi\mu(P,t)$ в уравнении (9). Выполнение требования регулярности решения на бесконечности можно проверить, опираясь на следующую лемму:

Лемма 4. *Для функции $H(r,t)$ справедливо представление*

$$H(r,t)=\frac{i}{\pi r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu e^{i\mu r}}{(\mu^2+1)^2}e^{-t/(\mu^2+1)}d\mu. \qquad (11)$$

Доказательство. В соответствии с леммой Жордана

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+\frac{p+1}{p}}d\mu=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+\frac{p+1}{p}},i\sqrt{\frac{p+1}{p}}\right]= =\pi i e^{\sqrt{(p+1)/p}\,r},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+1}d\mu=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+1},i\right]=\pi i e^{-r},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{(p+1)/p}\,r}}{r}-\frac{e^{-r}}{r}\right)e^{pt}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi i}\left(\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+\frac{p+1}{p}}-\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+1}\right)d\mu\,e^{pt}dp=$$

$$=\frac{i}{\pi r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu e^{i\mu r}}{(\mu^2+1)^2}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\frac{p+1}{\mu^2+1}}e^{pt}dp\right)d\mu.$$

Вычисление внутреннего интеграла (преобразование Меллина) дает утверждение леммы.

Интеграл (11) удовлетворяет лемме Жордана в верхней полуплоскости. При замене контура интегрирования на $\{\mu:\ \mu=i+\varepsilon e^{i\varphi},\ \ \varphi\in[0,2\pi]\}$ несложно прийти к оценке

$$|H(r,t)|\leqslant C_1(\varepsilon)\frac{e^{-r(1-\varepsilon)}}{r}e^{C_2(\varepsilon)t}, \qquad (12)$$

которая обеспечивает регулярность решения $u(M,t)$ на бесконечности (эта же оценка будет иметь место и для производных функции H по пространственным аргументам). Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Если функция $g(P,t)$ непрерывна по P, непрерывно дифференцируема по t и $g(P,0)=0$, то существует классическое регулярное на бесконечности решение задачи* (3) *в области $\mathbb{R}^3\backslash D$, где D ограничена поверхностью Ляпунова S.*

1.2. Случай ненулевых начальных данных

В п. 1.1 было отмечено, что в начальный момент времени функция u должна удовлетворять задаче (2), поэтому естественным образом возникает вопрос о существовании решения при ненулевых начальных условиях. Исходная система (для внутренней задачи) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u-u)-u=0, & M\in D,\quad t\in(0,T],\\ u(P,t)=g(P,t), & P\in S,\quad t\in[0,T],\\ u(M,0)=u_0(M), & M\in D.\end{cases} \qquad (13)$$

Функция $g(P,t)$ по-прежнему считается непрерывной по P, непрерывно дифференцируемой по t и непрерывно примыкающей к начальным условиям, $u_0(M)\in\mathbb{C}^{(2)}(D)$. Пусть $u=\tilde{u}+u_0$. Тогда для $\tilde{u}$ получаем задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta\tilde{u}-\tilde{u})-\tilde{u}=u_0(M),\\ \tilde{u}(P,t)=g(P,t)-u_0(P),\\ \tilde{u}|_{t=0}=0.\end{cases}$$

Решение неоднородного уравнения $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\tilde{u}-\tilde{u})-$ $-\tilde{u}=u_0(M)$ может быть получено с помощью объемного потенциала — свертки фундаментального решения $v(r,t)$ уравнения (1) и правой части — функции u_0. Обозначим этот потенциал как u_1:

$$u_1(M,t) = \int_0^t \int_D u_0(Q) v(R_{MQ}, \tau)\, dv_Q\, d\tau. \quad (14)$$

Лемма 5. *Для фундаментального решения уравнения* (1) *справедливы следующие представления:*

$$v(r,t) = -\frac{1}{4\pi r} + \Psi(r,t), \quad (15)$$

где $\Psi(r,t) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{n-1}}{n!}[I + \psi(t)^*]^n \mathbf{1}(t)$, *а функция* $\psi(t) \in \mathbb{C}([0,T])$;

$$v(r,t) = \frac{1}{4\pi r}\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu e^{i\mu r}}{\mu^2+1}e^{-t/(\mu^2+1)}\, d\mu. \quad (16)$$

Сформулированная лемма является аналогом лемм 1 и 4 и доказывается исходя из интегрального вида фундаментального решения, полученного при помощи методов, развитых для уравнений данного типа в [1] (в данном случае методика сводится к преобразованию Лапласа по t обеих частей уравнения (1) с $\delta(M,t)$ вместо нуля в правой части, построению фундаментального решения полученного уравнения, совпадающего по форме с уравнением Кирхгофа, и осуществлению обратного преобразования Лапласа):

$$v(r,t) = -\frac{1}{4\pi r}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{p}e^{pt-\sqrt{(p+1)/p}\,r}dp. \quad (17)$$

В частности, вывод формулы (16) опирается на представление

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu r}\mu}{\mu^2+\frac{p+1}{p}}d\mu = $$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i\mu r}\mu}{\mu^2+\frac{p+1}{p}}, i\sqrt{\frac{p+1}{p}}\right] = \pi i e^{-\sqrt{(p+1)/p}\,r},$$

подставляемое в формулу (17).

Согласно теории обобщенных функций, для квадратично интегрируемых u_0 построенный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению в обобщенном смысле. Для непрерывно дифференцируемых правых частей потенциал (14) является классическим решением неоднородного уравнения. Последнее имеет место в силу того, что у потенциала существуют первая по временной и вторые по пространственным переменным производные. В существовании названных производных легко убедиться, воспользовавшись представлением (15) из леммы 5. Отметим также, что построенный потенциал в этом случае на границе области D принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}(S))$. Пусть теперь $\tilde{u} = u_1 + u_2$. Тогда u_2 должна удовлетворять задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u_2 - u_2) - u_2 = 0, \\ u_2(P,t) = g(P,t) - u_0(P) - u_1(P,t), \\ u_2|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Существование решения этой задачи следует из теоремы 1.

При рассмотрении внешней задачи следует наложить условие на $u_0(M)$, так как решение должно быть регулярным на бесконечности. Это условие можно задать, например, в следующем виде: $\exists R_0$ и $\varkappa > 0$: $\forall M$, $R_{M0} > R_0$:

$$|u_0(M)| \leqslant e^{-\varkappa R_{M0}}. \quad (18)$$

Такое требование выглядит слишком сильным, однако для функций, являющихся решением задачи (2), оно всегда выполняется, а выполнение условия регулярности становится после получения оценки, аналогичной (12) (вывод опирается на представление (16) из леммы 5), очевидным. Итак, доказана

Теорема 3. *Если $u_0(M)$ непрерывно дифференцируема, а $g(P,t)$ непрерывна по P, непрерывно дифференцируема по t и $g(P,0) = u_0(P)$, то существуют классические решения внутренней и внешней (при выполнении условия* (18)*) задач Дирихле для уравнения стратификации.*

2. Единственность решения

В предыдущем пункте было показано, что классические решения внутренней и внешней начально-краевых задач Дирихле для уравнения стратификации существуют и представимы в виде суммы динамических потенциала двойного слоя и объемного потенциала. Докажем, что эти решения единственны.

Теорема 4. *Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для уравнения стратификации имеют не более одного классического решения.*

Доказательство. Рассмотрим задачу (13), где под D будем теперь подразумевать как внутреннюю, так и внешнюю область. Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ являются решениями данной задачи и $w = u^{(2)} - u^{(1)}$. Тогда w удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta w - w) - w = 0, \\ w(P,t) = 0, \\ w(M,0) = 0, \end{cases}$$

которая при $w \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{(2)}(D))$ допускает запись в эквивалентном виде

$$\begin{cases} \Delta w - w = \displaystyle\int_0^t w\, d\tau, \\ w|_S = 0. \end{cases}$$

Формально решение последней задачи выписывается с помощью функции Грина $G(M,Q)$ (функции влияния точечного источника) задачи Дирихле для уравнения Кирхгофа с однородными граничными условиями

$$w(M,t) = \int\limits_D G(M,Q) \int\limits_0^t w(Q,\tau)\, d\tau\, dv_Q,$$

из которого следует оценка (в силу положительности G)

$$|w(M,t)| \leqslant \max_{M\in D} \int\limits_D G(M,Q)\, dv_Q \int\limits_0^t \max_{Q\in D} |w(Q,\tau)|\, d\tau. \tag{19}$$

Поскольку $w(M,t)$ непрерывна по всем аргументам и регулярна на бесконечности (в случае внешней задачи), можно утверждать, что $|w| \leqslant W < \infty$. Заметим, что функция $G(M,Q)$ интегрируема по Q как для внутренней, так и для внешней задачи и величина интеграла ограничена при $M \in D$. Таким образом, справедлива оценка

$$|w| \leqslant K \int\limits_0^t W\, d\tau = WKt, \quad K = \max_{M\in D} \int\limits_D G(M,Q)\, dv_Q.$$

Подставляя последний результат в правую часть формулы (19), получим $|w| \leqslant W\frac{K^2t^2}{2}$. Повторяя операцию n раз, получим оценку $|w| \leqslant W\frac{K^nt^n}{n!}$, где n произвольно. Такой оценке может удовлетворять только $w \equiv 0$, что доказывает единственность решения исходной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00122, 05-01-00144) и президентской программы поддержки молодых кандидатов наук (МК-1513.2005.9).

Литература

1. *Плетнер Ю.Д.* // ЖВМ и МФ. 1992. **32**. № 12. С. 1885.
2. *Астратов В.Н., Ильинский А.В., Киселев В.А.* // Физика твердого тела. 1984. **26**, № 9. С. 2843.
3. *Фурман А.С.* // Физика твердого тела. 1986. **28**, № 7. С. 2083.
4. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 8. С. 1237.
5. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1999. **39**, № 6. С. 1006.
6. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М., 1998.
7. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарной теории внутренних волн. М., 1990.
8. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986.
9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
10. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М., 2002.
11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию
04.10.06