УДК 519.95

ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛОВ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИЗЕ ИХ ФОРМЫ

А. И. Чуличков, С. Н. Куличков*), Д. С. Демин
(*кафедра компьютерных методов физики*)
E-mail: ach@cmp.phys.msu.ru

На основе сравнения по форме [1] фрагментов сигналов неизвестного источника, регистрируемых пространственно разнесенными датчиками в неизвестных и различных для разных датчиков условиях, получены оценки их относительной временной задержки. Оценки минимизируют максимальную погрешность определения временной задержки сигналов датчиков при гарантированной надежности оценивания [2, 3]. Форма сигнала определена как инвариант класса его преобразований, моделирующих возможные изменения условий его регистрации.

Введение

В настоящей работе решена задача оценивания относительного времени задержки сигналов, распространяющихся от некоторого неизвестного источника до пространственно разнесенных датчиков. Условия регистрации сигнала в разных точках пространства неодинаковы, в результате измеряемые сигналы различаются не только временным сдвигом, но и нелинейными искажениями, сохраняющими лишь общую форму сигнала. Кроме того, измерения сопровождаются аддитивным шумом неизвестной дисперсии.

Форма сигнала. Сравнение сигналов по форме

Сигналы рассматриваются как векторы евклидова пространства R^n, заданные своими координатами. Значение i-й координаты вектора $f \in R^n$ интерпретируется как амплитуда сигнала в i-й момент времени $t_i = t_0 + i\delta$, $i = 1, \dots, n$, и шаг по времени много меньше времени характерных изменений сигнала.

Будем считать, что изменение условий регистрации приводит к преобразованию сигнала, сохраняющему упорядоченность его координат. Такие преобразования даются монотонно возрастающими функциями координат: если $g_i = F(f_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$, а $F(\cdot)$ — монотонно возрастающая функция, то неравенства, выполненные для любой пары координат вектора $f \in R^n$, выполняются и для той же пары координат вектора $g \in R^n$. При этом, в частности, сохраняются интервалы монотонности и локальные экстремумы зависимостей координат от их номера. Форма сигнала $f \in R^n$ определяется как замыкание $\overline{V}_f$ в R^n множества векторов, полученного из f всеми монотонно возрастающими преобразованиями его координат:

$$\overline{V}_f = \{g = F \cdot f,\ F \in \overline{\mathbf{F}}\},$$

где $g = F \cdot f$ означает, что координаты $g_1, \dots, g_n$ вектора g подчинены равенствам $g_i = F(f_i)$, $i = 1, \dots, n$, а $\overline{\mathbf{F}}$ — класс монотонно неубывающих функций. Множество $\overline{V}_f$ является выпуклым замкнутым конусом в R^n и конструктивно может быть задано оператором P_f проецирования на это множество [1]. Оператор P_f определяет проекцию $P_f g$ сигнала $g \in R^n$ на $\overline{V}_f$ как решение задачи наилучшего приближения g элементами из $\overline{V}_f$:

$$||g - P_f g||^2 = \inf\{||g - h||^2 \mid h \in \overline{V}_f\}. \qquad (1)$$

Замыкание множества $\overline{V}_f$ приводит к замене монотонно возрастающих преобразований координат на монотонно неубывающие, при этом может случиться так, что неравенство $f_i > f_j$ после преобразования $F(\cdot)$ координат вектора f превратится в равенство $F(f_i) = F(f_j)$, чего не случилось бы при строго монотонных преобразованиях. Преобразования $F \in \overline{\mathbf{F}}$, таким образом, могут «упростить» форму сигнала f. Следуя [1], будем говорить, что сигнал g не сложнее по форме, чем f, если $g = F \cdot f$ для некоторого $F \in \overline{\mathbf{F}}$.

Постановка задачи

Рассмотрим сигналы, регистрируемые двумя датчиками. Пусть измерения проводятся в моменты времени t_k, $k = -M, -M+1, \dots, n+M$, с шагом δ, много большим временного сдвига. Будем считать, что результаты измерения ξ_1 и ξ_2 этих сигналов первым и вторым датчиками соответственно можно записать в виде

$$\xi_{1,i} = f_i, \quad \xi_{2,i} = F(f_{i+m_0}) + \nu_i, \qquad i = -M, -M+1, \dots, n+M, \qquad (2)$$

*) Институт физики атмосферы РАН.

где $|m_0| \leqslant M$ — неизвестный временной сдвиг второго сигнала относительно первого, а $F(\cdot)$ — некоторая неизвестная монотонно неубывающая функция, описывающая отличие условий регистрации сигнала вторым датчиком от эталонных, принятых для первого. Моделирующие погрешность измерений случайные величины ν_i, $i=-M,-M+1,\ldots,n+M$, некоррелированы и контролируются нормальным распределением $N(0,\sigma^2)$ с неизвестной дисперсией $\sigma^2>0$. По результатам измерений (2) требуется оценить значение параметра сдвига $m_0 \in \{-M,\ldots,M\}$.

Для решения этой задачи выберем фрагменты $f=(f_1,\ldots,f_n)\in R^n$ и $\xi_m=(\xi_{2,m+1},\ldots,\xi_{2,m+n})\in R^n$ и сравним по форме математическое ожидание $g_m \in R^n$ второго фрагмента с первым для каждого $m\in\{-M,\ldots,M\}$. Выберем множество тех значений m, для которых достаточно вероятно включение $g_m \in \overline{V}_f \equiv \{F\cdot f, F\in \overline{\mathbf{F}}\}$, и будем использовать его в качестве множества, оценивающего значение m_0 в (2).

Близость сигналов по форме

Фиксируем некоторое значение $m\in\{-M,\ldots,M\}$ и сравним вектор ξ_m по форме с f. В отсутствие погрешности измерений (2) форма ξ_m не сложнее, чем форма f, если

$$\xi_m = F\cdot f \tag{3}$$

при некотором $F\in\overline{\mathbf{F}}$, что эквивалентно равенству $P_f\xi_m=\xi_m$. При наличии погрешности измерения (2) равенство (3) может нарушаться даже при истинном значении сдвига $m=m_0$. Естественно считать, что чем больше квадрат расстояния $||\xi_m-P_f\xi_m||^2$ от ξ_m до $\overline{V}_f$, тем меньше сходство по форме сигнала ξ_m с f.

Однако распределение статистики $||\xi_m-P_f\xi_m||^2$ зависит от неизвестной дисперсии σ^2 шума ν в (2) и поэтому не может служить для количественной характеристики сходства по форме сигнала ξ_m с f. Для этой цели лучше подходит статистика [1]

$$\tau(\xi_m)=\frac{||\xi_m-P_f\xi_m||^2}{||P_f\xi_m-P_0\xi_m||^2}, \tag{4}$$

где P_0 — проектор на множество $\overline{V}_0=\{\mu\in R^n\colon \mu_i=c,\ i=1,\ldots,n,\ c\in(-\infty,\infty)\}$ сигналов, все координаты которых равны одной и той же константе. Распределение статистики (4) в меньшей степени зависит от неизвестных параметров распределения случайного вектора ξ_m, в частности не изменяется при умножении ξ_m на любое число, отличное от нуля, и при сложении ξ_m с любым вектором $\mu\in\overline{V}_0$, координаты которого $\mu_i=\mathrm{const}$, $i=1,\ldots,n$. Знаменатель дроби (4) дает отличие сигнала $P_f\xi_m$ по форме от сигнала, равного константе (т.е. от вектора, все координаты которого равны одной и той же величине). Сигнал $P_0\xi_m$, равный константе, хотя и принадлежит $\overline{V}_f$, но не несет никакой информации о форме сигнала f, в то время как разность $||P_f\xi_m-P_0\xi_m||$ дает «существенную часть» сигнала ξ_m, сравнимую по форме с f, и дробь (4) тем меньше, чем меньше «часть» сигнала $\xi_m-P_f\xi_m$, отличающая ξ_m по форме от f, по сравнению с «существенной частью» $P_f\xi_m-P_0\xi_m$ сигнала ξ_m, сравнимой по форме с f. Иными словами, значение дроби (4) тем больше, чем ближе сигнал ξ_m к константе по сравнению с близостью ξ_m к $\overline{V}_f$. Таким образом, формально речь идет о проверке гипотезы

$$H\colon \xi_m\sim N(a,\sigma^2 I),\quad a\in\overline{V}_f\setminus\overline{V}_0 \tag{5}$$

при альтернативе

$$K\colon \xi_m\sim N(a,\sigma^2 I),\quad a\in\overline{V}_0. \tag{6}$$

Морфологический критерий проверки гипотезы (5) при альтернативе (6) определяется критическим множеством [1]

$$S=\{z\in R^n\colon \tau(z)\geqslant\delta\}. \tag{7}$$

Если $\xi_m\notin S$, то гипотеза (5) принимается и можно считать, что сигнал ξ_m достаточно близок по форме к сигналу f. Степень согласия гипотезы (5) с результатом наблюдения ξ_m, следуя [1, 2], охарактеризуем надежностью гипотезы, равной минимальному уровню критерия, при котором по наблюдению ξ_m (5) отвергается в пользу (6). Надежность в данном случае равна

$$\alpha_H(\xi_m)= \\ =\sup\left\{\int\limits_{\tau(x)\geqslant\tau(\xi_m)} p_{N(\mu,\sigma^2 I)}(x)\,dx \;\middle|\; \mu\in\overline{V}_f\setminus\overline{V}_0,\ \sigma^2>0\right\}, \tag{8}$$

где $p_{N(\mu,\sigma^2 I)}(\cdot)$ — плотность нормального распределения. Точная верхняя грань в (8) равна $\alpha_H(\xi_m)=\int\limits_{\tau(x)\geqslant\tau(\xi)} p_{N(\mu_0,I)}(x)\,dx$ и с вероятностью единица одна и та же для любого $\mu_0\in\overline{V}_0$, в частности для $\mu_0=0$. Она может быть вычислена методом Монте-Карло путем разыгрывания реализаций вектора $\zeta\sim N(\mu_0,I)$ с математическим ожиданием $\mu_{0,i}=0$, $i=1,\ldots,n$, и подсчета частоты реализаций, для которых $\tau(\zeta)\geqslant\tau(\xi_m)$.

Заметим, что если $\overline{V}_f$ — k-мерное подпространство R^n, то случайная величина $\frac{n-k}{\tau(\zeta)(k-1)}$ при $\zeta\sim N(\mu,\sigma^2 I)$, $\mu\in\overline{V}_0$, контролируется распределением Снедекора–Фишера с $k-1$, $n-k$ степенями свободы, а область S в (7) определяет равномерно наиболее мощный критерий проверки гипотезы (5) при альтернативе (6) в классе критериев, инвариантных к преобразованиям, определяемым симметрией задачи проверки гипотез (5), (6) [4, 5].

Множество, оценивающее значение m временного сдвига

Вернемся к оцениванию значения m временного сдвига сигнала ξ_2 относительно ξ_1 и построим множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$, оценивающее параметр $m \in \{-M, \ldots, M\}$ по следующему правилу: будем считать, что оценивающее множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ состоит из тех и только тех значений $m \in \{-M, \ldots, M\}$, для которых надежность гипотезы (5) при альтернативе (6) не меньше $1 - p$:

$$\alpha(\xi_m) = P\big(\tau(\zeta) \geqslant \tau(\xi_m)\big) \geqslant 1 - p, \tag{9}$$

что влечет неравенство $\tau(\xi_m) \leqslant \delta(\varepsilon)$. Чем меньше $\delta(\varepsilon)$, тем меньше (по включению) оценивающее множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ и тем точнее локализуется оцениваемое значение m. В силу определения случайное множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ накрывает истинное значение параметра $m \in \{-M, \ldots, M\}$ с вероятностью не меньше p.

Заметим, что эта оценка вероятности накрытия истинного значения параметра m случайным оценивающим множеством $I_p(\xi_1, \xi_2)$ получена в условиях неизвестной дисперсии измерительной погрешности; она вычисляется как точная нижняя грань по всем возможным частным распределениям гипотезы и равна пределу надежности частной гипотезы при стремлении математического ожидания вектора ξ_m к константе. Поскольку на практике математическое ожидание ξ неизвестно, то можно лишь гарантировать, что оценивающее множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ накрывает истинное значение сдвига m с вероятностью не меньшей p (хотя в реальности эта вероятность может быть значительно больше).

Минимаксная оценка временного сдвига гарантированной надежности

Для множества $I_p(\xi_1, \xi_2)$ построим минимаксную оценку

$$\sup_{i \in I_p(\xi_1, \xi_2)} ||i - \widetilde{\imath}|| = \inf_{i' \in \{-M, \ldots, M\}} \sup_{i \in I_p(\xi_1, \xi_2)} |i - i'|. \tag{10}$$

Оценка $\widetilde{\imath}$ с гарантированной вероятностью p минимизирует максимально возможную погрешность оценивания параметра сдвига. Решением задачи (10) является середина отрезка минимальной длины, содержащего множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$, половина его длины является погрешностью оценки $\widetilde{\imath}$ [1]. Ясно, что чем выше вероятность p, тем больше погрешность оценивания.

Результаты оценивания сдвига

В эксперименте регистрировались выходные сигналы трех датчиков акустического давления, расположенных в вершинах треугольника. Вычислялись оценки времени задержки. Предложенный метод использовался для оценки времени задержки выходных сигналов второго и третьего датчиков относительно выходного сигнала первого датчика. На рис. 1 изображены два фрагмента сигналов, в первом случае (рис. 1, *а*) фрагмент имеет ярко выраженные особенности формы, однако участки монотонности не идентичны на всех трех сигналах, что можно объяснить наличием шумов; сигналы второго фрагмента (рис. 1, *б*) меньше по амплитуде по сравнению с сигналами первого фрагмента, что может свидетельствовать о меньшей амплитуде полезного сигнала и, следовательно, о большей его близости к константе.

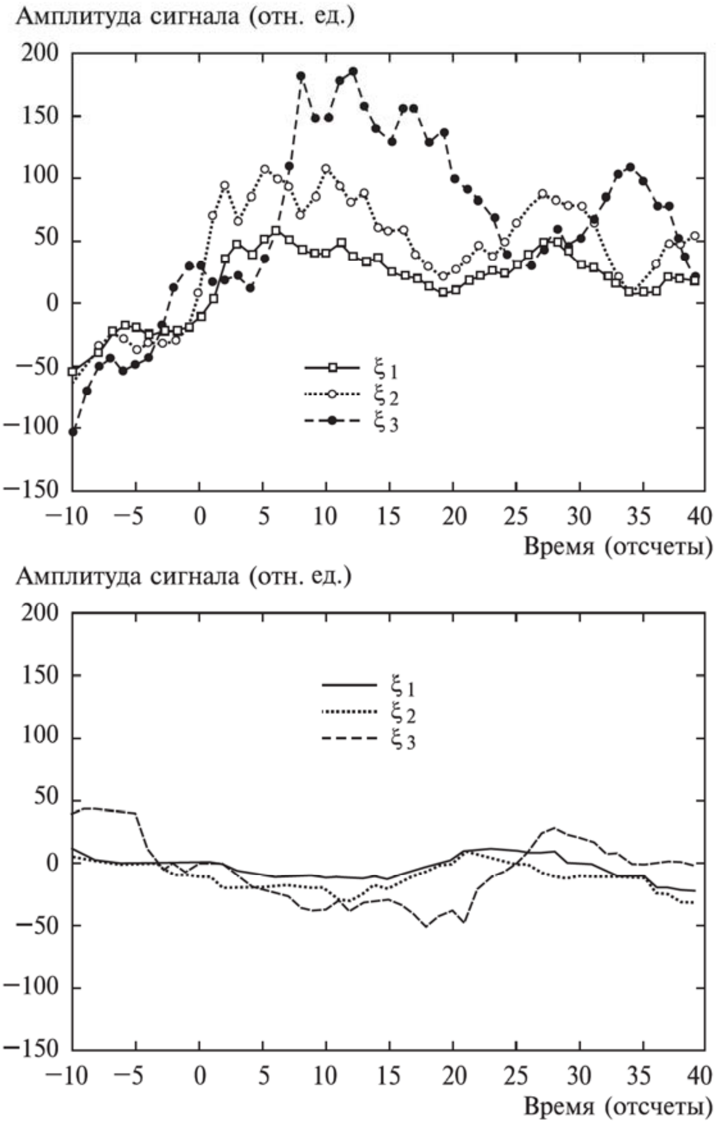

Рис. 1. Фрагменты сигналов, зарегистрированных тремя датчиками: *а* — фрагменты имеют ярко выраженные особенности формы; *б* — фрагменты сигналов малой амплитуды, особенности формы выражены слабо

На рис. 2 приведены графики надежности $\alpha_H(\xi_m)$ в зависимости от сдвига $m \in \{-M, \ldots, M\}$ сигналов второго и третьего датчиков относительно сигнала первого датчика, а также показаны множества, оценивающие соответствующие временные сдвиги:

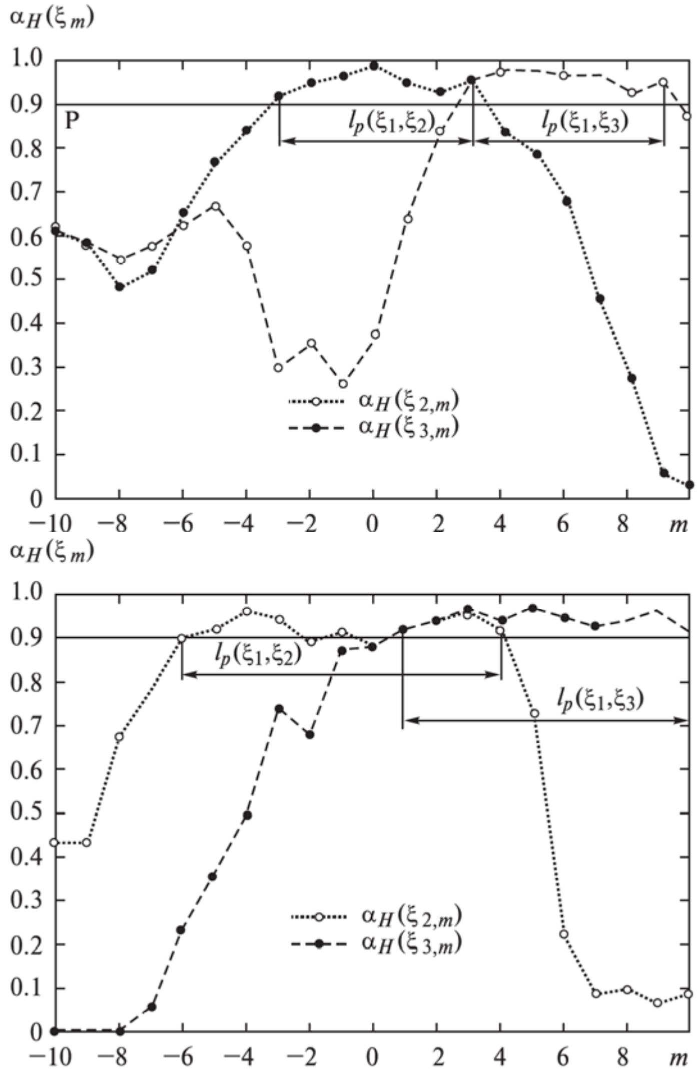

Рис. 2. Надежность $\alpha_H(\xi_m)$ в зависимости от сдвига $m \in \{-10, \ldots, 10\}$ сигналов второго и третьего датчиков относительно сигнала первого датчика: *а* — для фрагментов сигналов, приведенных на рис. 1, *а*; *б* — для фрагментов, приведенных на рис. 1, *б*. $I_p(\xi_1, \xi_2)$ и $I_p(\xi_1, \xi_3)$ — интервальные оценки уровня не менее $p = 0.1$ временного сдвига второго сигнала относительно первого и третьего сигнала относительно первого соответственно

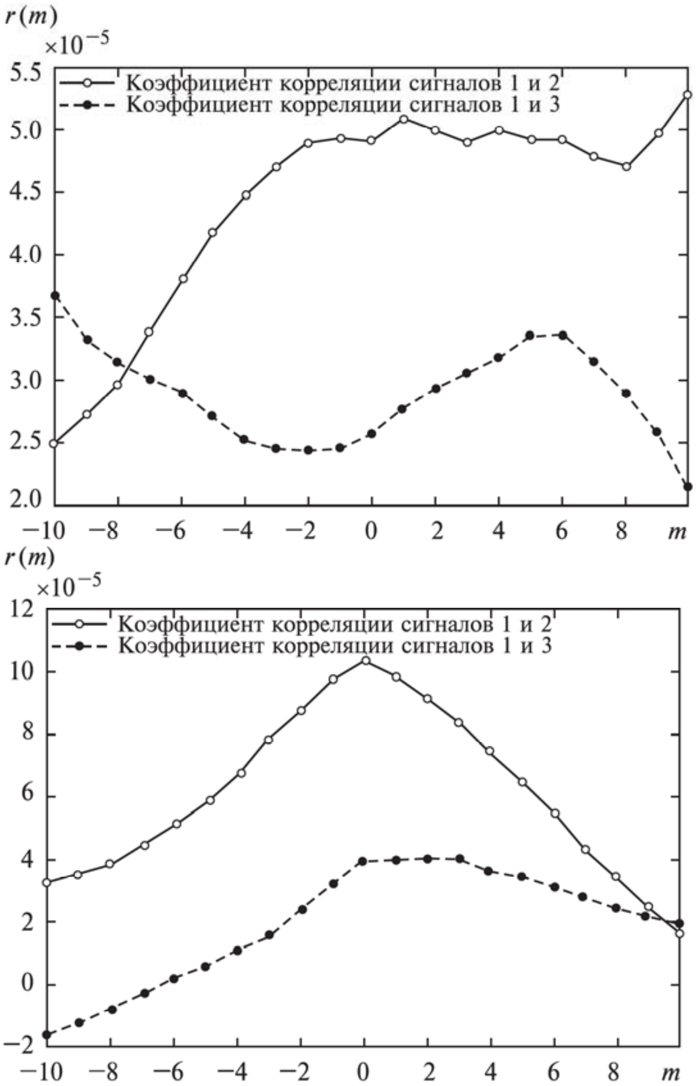

Рис. 3. Зависимость коэффициентов корреляции r_m сигнала первого датчика и сдвинутого на m отсчетов второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) датчиков, $m \in \{-10, \ldots, 10\}$: *а* — для фрагментов сигналов, приведенных на рис. 1, *а*; *б* — для фрагментов, приведенных на рис. 1, *б*

эти множества содержат те значения параметра, при которых надежность $\alpha_H(\xi_m)$ не меньше 0.9, а значит, в силу (9) содержат истинное значение $m \in \{-M, \ldots, M\}$ с вероятностью, гарантированно не меньшей 0.1.

Видно, что для фрагментов, изображенных на рис. 1, *а*, оценка параметра сдвига с вероятностью не ниже 0.1 обладает существенно меньшей погрешностью, чем оценка для фрагментов, изображенных на рис. 1, *б*.

На рис. 3 приведены графики коэффициента корреляции $r(m) = \frac{|(f, \xi_m)|}{||f|| \, ||\xi_m||}$, $m \in \{-M, \ldots, M\}$, для ситуации, когда вектор $f \in R^n$ выбран из сигнала первого датчика, а $\xi_m \in R^n$ — сдвинутый на m отсчетов участок сигнала второго (сплошная кривая) и третьего (пунктир) датчиков, изображенных на рис. 1, *а*, *б* соответственно. Если бы сигнал $\xi_m \neq 0$ можно было получить из $f \neq 0$ линейным преобразованием его координат, то в силу неравенства Коши $r(m) = 1$, в противном случае $r(m) < 1$. Малое значение $r(m)$, $m \in \{-M, \ldots, M\}$, свидетельствует о малых корреляциях сигналов, а широкий максимум коэффициента корреляции — о невозможности оценки сдвига на основе анализа линейной зависимости сравниваемых сигналов.

В заключение заметим, что широко распространенный метод максимального правдоподобия в данном случае приводит к оценке параметра сдвига из условия $\widehat{m} = \arg\min_m ||P_f \xi_m - \xi_m||^2$, недостатки которого при неизвестной дисперсии погрешности измерения (2) обсуждены выше.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00615, 05-05-64973).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса: Сб. М., 1984.
2. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М., 2004.
3. *Чуличков А.И.* Основы теории измерительно-вычислительных систем. Стохастические линейные измерительно-вычислительные системы. Тамбов: Изд-во Тамбовского гос. тех. ун-та, 2000.
4. *Чуличков А.И., Морозова И.В.* // Интеллектуальные системы. 2005. **9**, № 1–4. С. 321.
5. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М., 1979.

Поступила в редакцию
27.12.06