ГЕОФИЗИКА

УДК 550.34+530.145

О НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ВОЛНАХ ВТОРОГО РОДА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

С. А. Арсеньев, Н. К. Шелковников

(*кафедра физики моря и вод суши*)

E-mail: arrsenyev@yandex.ru

Исследованы нелинейные матричные волны второго рода, в особенности процессы формирования пилообразных ударных волн. Конкретные расчеты упругих волн проведены в пористых осадочных геопородах, насыщенных газом.

Изучим волны второго рода (матричные волны) по терминологии Френкеля, Био и Николаевского [1]. Они имеют большое значение для нефтяной и газовой промышленности, так как они вызывают переупаковку твердой матрицы осадочных геопород, освобождая удерживаемую в них нефть и газ. Определенный интерес представляют они и для сейсмологии, и для подземной гидрологии. Исходные уравнения теории запишем в виде [2]

$$\rho_1(1-m_0)\frac{D_1 u_i}{D_1 t} - \rho_2(1-m_0)\frac{D_2 w_i}{D_2 t} - \frac{\mu}{a_0} m_0(1-m_0)(w_i - u_i) - \frac{\partial \sigma^e_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad (1)$$

$$\rho_2 \frac{D_2 w_i}{D_2 t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu m_0(1-m_0)}{a_0}(w_i - u_i) = 0, \qquad (2)$$

$$(1-m_0)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + m_0 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (3)$$

Здесь u_i — возмущения скорости смещений твердой матрицы пористой среды, w_i — колебательная скорость флюида, ρ_1 и ρ_2 — равновесная плотность твердой фазы и флюида, μ — вязкость флюида, $a_0 = k_0(1-m_0)$ и k_0 — проницаемость пласта, p — поровое давление, m_0 — равновесная плотность, σ^e_{ij} — действующие напряжения, $D_1/D_1 t = \partial/\partial t + u_j \partial/\partial x_j$ и $D_2/D_2 t = \partial/\partial t + w_j \partial/\partial x_j$ — операторы Эйлера, описывающие ускорения твердой и флюидной фазы соответственно. Систему (1)–(3) замкнем обобщенным законом Гука, дополненным учетом первой сдвиговой η и второй объемной ζ вязкости матрицы породы [1–4]:

$$\sigma^e_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}G\right) e\delta_{ij} + 2G e_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \varsigma \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}. \qquad (4)$$

Здесь K — модуль всестороннего сжатия матрицы, G — ее модуль сдвига.

Для практических целей достаточно изучить волны, распространяющиеся вдоль определенного направления, например x. Уравнение (3) тогда имеет вид $u = -w[m_0/(1-m_0)]$, где $u \equiv u_x$, $w \equiv w_x$. Реологическое уравнение (4) переходит в

$$\sigma^e_{xx} \equiv \sigma = \left(K - \frac{4}{3}G\right) e + \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (5)$$

где $e \equiv e_{xx}$. Мы также должны учесть связь деформаций e_{ij} со смещениями L_i. Имеем $e = \partial L_x/\partial x$, $u = \partial L_x/\partial t$ и $\partial e/\partial t = \partial u/\partial x$ и вместо (1) получим

$$\rho_1(1-m_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right) - \rho_2(1-m_0)\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial x}\right) - \frac{\mu}{a_0} m_0(1-m_0)(w-u) - \left(K - \frac{4}{3}G\right)\frac{\partial e}{\partial x} - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (6)$$

Из (6) исключим деформацию e, дифференцируя по времени:

$$\rho_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial t \partial x}\right) - \rho_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w^2}{\partial t \partial x}\right) - M\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu}{a_0} m_0\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad (7)$$

где $M = [K - (4/3)G]/(1-m_0)$ — эффективный модуль матрицы и $V = [(4/3)\eta + \zeta]/(1-m_0)$ — эффективная вязкость матрицы. Наконец, элиминируя из (7) w, получим нелинейное волновое уравнение с диссипацией

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N\frac{\partial^2 u^2}{\partial t \partial x} + \frac{\mu}{\rho_a a_0}\frac{\partial u}{\partial t} - V_k \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0, \qquad (8)$$

в котором $c=(M/\rho_a)^{1/2}$ — скорость волны второго рода, $\rho_a=(\rho_1+\rho_2-\rho_m)/m_0$ — сейсмическая плотность, $\rho_m=\rho_1(1-m_0)+\rho_2 m_0$ — плотность геосреды,

$$N=\frac{1}{2\rho_a}\left[\rho_1-\frac{\rho_2(1-m_0)^2}{m_0^2}\right] \qquad (9)$$

— параметр нелинейности, $V_k=V/\rho_a$ — кинематическая эффективная вязкость матрицы. Из (9) следует, что при значениях средней пористости m_0, равных

$$m_0^c=\frac{\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\left[-1+\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\right], \quad m_0>0, \qquad (10)$$

параметр нелинейности N обращается в нуль и матричные волны становятся чисто линейными. При $m_0<m_0^c$ $N<0$, в то время как при $m_0>m_0^c$ $N>0$.

Введем $T=\omega t$, $S=u/u_0$, $X=\omega x/c$, где ω — частота волны и u_0 — скорость смещений твердой фазы в источнике. Тогда из (8) имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}+\mathrm{Ma}\,N\frac{\partial^2 S^2}{\partial T\partial X}+\mathrm{Da}\frac{\partial S}{\partial t}-\mathrm{Bu}\frac{\partial^3 S}{\partial T\partial X^2}=0. \qquad (11)$$

Здесь $\mathrm{Ma}=u_0/c$ — акустическое число Маха, $\mathrm{Da}=\omega_D/\omega$ — число Дарси, в котором частота трения $\omega_D=\mu/(\rho_a a_0)$, и $\mathrm{Bu}=V_k\omega/c^2$ — число Бюргерса, которое можно выразить через сейсмическое число Рейнольдса Re. Именно $\mathrm{Bu}=\mathrm{Ma}/\mathrm{Re}$, $\mathrm{Re}=\rho_a\lambda u_0/2\pi V=\rho_a c u_0/\omega V$, где λ — длина волны частоты ω. Удобно также вводить число Римана $\mathrm{Ri}=\mathrm{Ma}\,N$.

Существенно, что число Дарси Da возрастает при понижении частоты ω, так что четвертый член в уравнении (11) представляет собой низкочастотное трение, обусловленное процессами фильтрационных перетоков в пористой среде. Наоборот, число Бюргерса Bu растет пропорционально частоте ω, и пятый член в уравнении (11) представляет собой высокочастотное трение, обусловленное вязкими потерями упругой энергии в твердой матрице. Два типа трения можно трактовать как наличие в пористой среде диссипативных процессов с двумя разными временами релаксации τ_D и τ_B. Им соответствуют частоты $\omega_D=1/\tau_D$, $\omega_B=1/\tau_B=c^2/V_k$. Очевидно, $\mathrm{Bu}=\omega/\omega_B$, $\mathrm{Re}=\omega_B u_0/c\omega$. Экстремальную частоту трения ω_0, на которой оба типа трения сравнимы, легко найти из условия $\mathrm{Da}=\mathrm{Bu}$. Имеем

$$\omega_0=\sqrt{\omega_D\omega_B}=\sqrt{\frac{\mu[K-(4/3)G]}{a_0\rho_a[(4/3)\eta+\zeta]}}. \qquad (12)$$

В таблице представлены результаты расчетов чисел Da и Bu в зависимости от циклической частоты ω для песчаников с плотностью $\rho_1=2.62$ г/см^3, насыщенных воздухом с плотностью $\rho_2=0.0012$ г/см^3, при вязкости матрицы $\eta=\zeta=3\cdot10^3$ пуаз и проницаемости по газу $k_0=1.04\cdot10^{-5}$ см^2. Упругие модули матрицы выбирались равными $K=6\cdot10^{10}$ дин/см^2 и $G=3.6\cdot10^{10}$ дин/см^2 [3, 4], так что $\omega_B=171428.6$ Гц. При пористости $m_0=0.16$ имеем также $\omega_D=7.88$ Гц, $N=0.49$, причем вязкость газа выбиралась равной вязкости воздуха $\mu=1.808\cdot10^{-4}$ пуаз. Значение ω_0 (12) оказалось равным 3675.5 Гц. При $\omega=\omega_0$ имеем $\mathrm{Bu}=\mathrm{Da}=0.0027$. Из таблицы видно, что в широком диапазоне частот ω от 16 Гц до 850 кГц $\mathrm{Bu}\ll1$, $\mathrm{Da}\ll1$. Следовательно, уравнение (11) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}+\varepsilon\left[R_1\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial X}+D_1\frac{\partial S}{\partial T}-B_1\frac{\partial^3 S}{\partial T\partial X^2}\right]=0, \qquad (13)$$

где $\mathrm{Ri}=\varepsilon R_1$, $\mathrm{Da}=\varepsilon D_1$, $\mathrm{Bu}=\varepsilon B_1$ и $\varepsilon<0.05$ — малый параметр.

Если $\varepsilon=0$, то уравнение (13) переходит в линейное волновое уравнение, имеющее известное решение $S=\Phi(T-X)=\Phi\{[t-(x/c)]\}$ в виде волны формы Φ. Поэтому при $\varepsilon\neq0$ решение уравнения (13) ищем в виде

$$S=Z(\varepsilon X, T-X)=Z(\xi,\tau), \qquad (14)$$

т. е. вводим медленную координату $\xi=\varepsilon X$ и быстрое время $\tau=T-X$. Из (13) и (14) находим нелинейное эволюционное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial\xi}+D_2S-R_2\frac{\partial S^2}{\partial\tau}-B_2\frac{\partial^2 S}{\partial\tau^2}=0; \qquad (15)$$
$$D_2=D_1/2, \quad R_2=R_1/2, \quad B_2=B_1/2.$$

В частном случае при $\mathrm{Da}\to0$ уравнение (15) превращается в

$$\frac{\partial S}{\partial\xi}-R_1S\frac{\partial S}{\partial\tau}-B_2\frac{\partial^2 S}{\partial\tau^2}=0. \qquad (16)$$

Это уравнение Бюргерса, решения которого обладают характерной чертой: все нелинейные искажения в волне исчезают по мере ее распространения из-за того, что диссипация сглаживает профиль волн [3, 4]. Наоборот, в экспериментах [5, 6] наблюдается накопление нелинейных эффектов и возрастание

ω, Гц	1	10	16	100	500	1000	3675.5	10^4
Bu	$6\cdot10^{-7}$	$6\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	$6\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-3}$
Da	7.88	0.78	0.49	0.08	0.016	0.008	$2\cdot10^{-3}$	$8\cdot10^{-4}$
ω, Гц	$5\cdot10^4$	10^5	$5\cdot10^5$	$8.5\cdot10^4$	$5\cdot10^6$			
Bu	0.029	0.058	0.29	0.496	2.92			
Da	$1.6\cdot10^{-4}$	$7.88\cdot10^{-5}$	$1.58\cdot10^{-5}$	$9.27\cdot10^{-6}$	$1.58\cdot10^{-6}$			

искажений формы волны по мере ее распространения. Это означает, что на обычных для сейсморазведки частотах высокочастотное трение несущественно, и мы приходим к необходимости исследовать справедливое при низких частотах уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} + D_2 S - R_1 S \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0. \qquad (17)$$

Если источник в точке $x = 0$ излучает гармоническую волну $S = \sin T$ с амплитудой u_0 и частотой ω, то решение уравнения (17) есть

$$\tau = -\frac{R_1}{D_2}[1 - \exp(-D_2\xi)]S\exp(D_2\xi) + \\ + \arcsin[S\exp(D_2\xi)]. \qquad (18)$$

Формулу (18) удобно анализировать графически в координатах τ и $S\exp(D_2\xi)$, где она представляется в виде суммы синусоиды и прямой с углом наклона к оси ординат ψ, определяемой из $\operatorname{tg}\psi = R_1[1 - \exp(-D_2\xi)]/D_2$.

При $\xi = 0$ $\operatorname{tg}\psi = 0$, т. е. волна является гармонической. С ростом расстояния ξ величина $\operatorname{tg}\psi$ увеличивается, а форма волны искажается: передний фронт становится круче, а задний — более пологим. При $\xi \to \infty$ $\operatorname{tg}\psi$ стремится к постоянному значению $\operatorname{tg}\psi_\infty = R_1/D_2 = 2\,\mathrm{Ri}\,/\,\mathrm{Da} = 2\,\mathrm{Ma}\,N\omega/\omega_D$. Если величина $\operatorname{tg}\psi$ мала по сравнению с единицей, то влияние нелинейности мало и форма волны близка к синусоиде. Огибающая амплитуд упругих волн в матрице спадает по закону $\exp(-D_2\xi)$ с коэффициентом поглощения $\alpha = \omega_D/2c = \mu/(\rho_a a_0 c)$.

С ростом нелинейности Ri величина $\operatorname{tg}\psi_\infty$ растет, фронт волны укручивается, и при $\operatorname{tg}\psi_\infty \geqslant 1$ в геосреде образуются пилообразные ударные волны. Условие $\operatorname{tg}\psi_\infty = 1$ или $\mathrm{Da} = 2\,\mathrm{Ri}$ определяет пороговую амплитуду образования ударных волн

$$u_0^s = \frac{\omega_D \lambda}{4\pi N} = \frac{\omega_D c}{2N\omega}. \qquad (19)$$

Таким образом, для того чтобы в пористой геосреде смогли возникнуть ударные пилообразные волны, необходимо, чтобы число $a = u_0/u_0^s$ было не меньше единицы, $a \geqslant 1$. Если же $a < 1$, то ударные пилообразные волны не образуются. На рис. 1 приведены формы волны при $a < 1$ (*а*) и $a \geqslant 1$ (*б*), иллюстрирующие процесс формирования пилообразных волн в пористой геосреде с фильтрационным трением. Например, для значений $\omega_D = 7.88$ Гц, $c = 737.53$ м/с, $N = 0.49$, $\omega = 30$ кГц получим $u_0^s = 0.197$ м/с. При амплитуде волны в источнике $u_0 = 0.1$ м/с имеем $a = 0.57 < 1$ и ударные волны не образуются. Однако уже на частоте $\omega = 60$ кГц, $u_0^s = 0.0983$ м/с, $a = 1.02 > 1$, т. е. условие образования ударных волн выполняется.

Расстояние x_c, на котором происходит формирование ударных волн, находим из уравнения

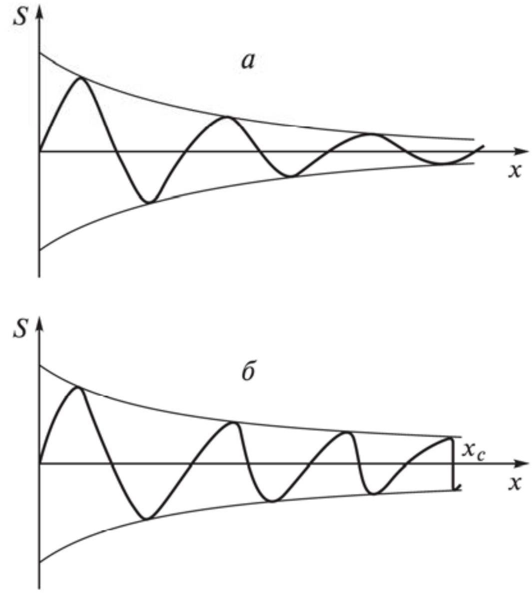

Рис. 1. Затухание матричных волн в пористой среде. При $a < 1$ (*а*) пилообразные волны не образуются. При $a > 1$ (*б*) на расстоянии $x = x_c$ происходит образование пилообразных ударных волн

$R_1[1 - \exp(-D_2\xi)]/D_2 = 1$. Оно дает

$$x_c = \frac{2c}{\omega_D}\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) = \frac{2\rho_a c k_0}{\mu}(1 - m_0)\ln\left(\frac{a}{a-1}\right). \qquad (20)$$

При $\omega_D = 7.88$ Гц, $c = 737.53$ м/с и $a = 1.02$ по формуле (20) находим $x_c = 767.1$ м. На этом расстоянии укладывается 9932 волны с длиной $\lambda = 7.7$ см и частотой $\omega = 60$ кГц. Кроме того, при $\omega_D = 7.88$ Гц, $c = 737.53$ м/с из формулы (20) получим $\alpha = 0.0053$ м$^{-1}$. Экспериментальные данные [7] дают для волн первого рода в насыщенных водой песках значение, равное приблизительно 0.02 м$^{-1}$. Следовательно, поглощение матричных волн второго рода в пористых средах, насыщенных газом, приблизительно в два раза меньше, чем волн первого рода в пористых средах, насыщенных жидкостью, что совпадает с расчетами по линейной теории [1]. Подчеркнем, что, в отличие от огибающей волны, поглощение самих нелинейных волн не является экспоненциальным и не может быть описано с помощью концепции коэффициента поглощения α. Это связано с тем, что с ростом амплитуды сигнала источника возникают высшие гармоники, забирающие часть энергии у основной волны. Гармоники поглощаются средой сильнее, чем исходный сигнал, поскольку имеют более высокую частоту. В этой связи необходимо детально изучить процесс возникновения нелинейных гармоник.

Для этого предположим, что источник (например, сейсмический вибратор) излучает гармоническую волну $S = \cos T$, и запишем решение (17) в виде

$$S = \exp(-D_2\xi)\cos\left\{\tau + \frac{R_1}{D_2}S[1 - \exp(D_2\xi)]\right\}. \qquad (21)$$

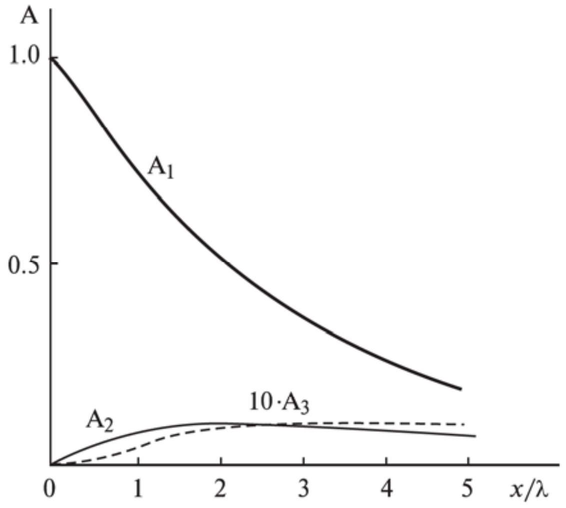

Рис. 2. Расчет спектра матричных волн по формуле (22) при условии $a < 1$, $\mathrm{Da} = 0,1$ на различных расстояниях x от источника. Порог $a = 1$ не превышен и ударные волны не образуются

Спектральное разложение этого решения есть

$$S \approx \exp(-D_2\xi) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [J_{2n}(\gamma) - J_{2n+2}(\gamma)] \cos[(2n+1)\tau + \pi n] + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n-1}(\gamma) + J_{2n+1}(\gamma)] \cos\left[2n\tau + \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi\right] \right\} \equiv$$
$$\equiv A_1(\xi)\cos\tau + A_2(\xi)\cos\left(2\tau + \frac{\pi}{2}\right) + A_3\cos(3\tau + \pi) + \ldots, \tag{22}$$

где буквой J обозначена функция Бесселя и $\gamma = R_1[1 - \exp(-D_2\xi)]/D_2$. Конкретные расчеты по формуле (22) проведены нами для случая $\mathrm{Da} = 0.1$, так что $\omega = 10\omega_D$. Расчеты проведены для двух уровней входного сигнала (рис. 2 и 3). В первом случае (рис. 2) $a < 1$ и ударные волны не образуются. Максимум амплитуды первой гармоники достигается при $x = 1.5\lambda$, а третьей гармоники — при $x = 3.5\lambda$. Во втором случае (рис. 3) амплитуда входного сигнала u^0 выше порогового значения, $a > 1$ и на расстоянии $x = 1.276\lambda$ образуются ударные пилообразные волны.

В заключение рассмотрим общее эволюционное уравнение (15). Введем новую переменную $z = 2R_2\xi = R_1\xi$ и запишем (15) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial z} + \Theta S - S\frac{\partial S}{\partial \tau} - \Gamma\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = 0, \tag{23}$$

где $\Theta = D_2/2R_2 = \mathrm{Da}/2\,\mathrm{Ri}$, $\Gamma = B_2/2R_2 = \mathrm{Bu}/2\,\mathrm{Ri}$ — безразмерные критерии. Применим к уравнению (23) известную в теории нелинейных волн замену Коула–Хопфа [8], которую проведем в два приема. Сначала введем функцию ψ, связанную

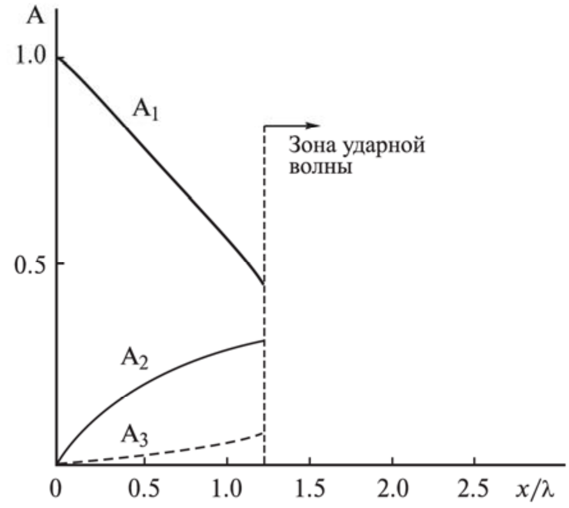

Рис. 3. Расчет спектра матричных волн по формуле (22) при условии $a > 1$, $\mathrm{Da} = 0.1$ на различных расстояниях x от источника. Порог $a = 1$ превышен, и ударные пилообразные волны сформировались на расстоянии $x_c = 1.276\lambda$

с безразмерной скоростью деформаций формулой $S = \partial\psi/\partial\tau$. Затем введем функцию φ, связанную с ψ равенством $\psi = 2\Gamma\ln\varphi$. Тогда вместо (23) получим $\partial\varphi/\partial z = \Gamma\partial^2\varphi/\partial\tau^2 - \Theta\varphi\ln\varphi$. Это уравнение теплопроводности с коэффициентом диффузии Γ и источником энергии $\varphi\ln\varphi$, зависящим от температуры φ. Оно описывает автоволны [9], имеющие скорость порядка $(\Gamma/\Theta)^{1/2} = (\mathrm{Bu}/\mathrm{Da})^{1/2}$. Время существования автоволн имеет порядок $1/\Theta = 2\,\mathrm{Ri}/\mathrm{Da}$.

Литература

1. *Николаевский В.Н.* Геодинамика и флюидодинамика. М., 1996.
2. *Арсеньев С.А., Николаевский В.Н., Шелковников Н.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 1. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2006. N 1. P. 91).
3. *Быков В.Г., Николаевский В.Н.* // Докл. РАН. 1992. **323**, № 3. С. 446.
4. *Быков В.Г., Николаевский В.Н.* // Докл. РАН. 1993. **325**, № 1. С. 35.
5. *Алешин А.С., Гущин В.В., Креков М.М.* и др. // ДАН СССР. 1981. **200**, № 3. С. 574.
6. *Nagava K., Soga K., Mitchell J.K.* // Geotechnique. 2001. **51**, N 1. P. 85.
7. *Kibbelwhite A.C.* // J. Acoust. Soc. Am. 1989. **86**, N 2. P. 716.
8. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М., 1990.
9. *Гуревич А.В., Минц Р.Г.* // Успехи физических наук. 1984. **142**, № 1. С. 61.

Поступила в редакцию
27.09.06