АСТРОНОМИЯ

УДК 519.246; 524

ПОДАВЛЕНИЕ УЗКОПОЛОСНЫХ НЕГАУССОВЫХ ПОМЕХ НА ВЫХОДЕ РЕЗОНАНСНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНТЕНН

А. В. Гусев

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.ru

Рассматриваются особенности амплитудно-частотного подавления коррелированных негауссовых помех на выходе линейного тракта резонансных гравитационных антенн при когерентной обработке информации в режиме быстрой фильтрации (fast filtering).

Введение

Основным режимом работы криогенных резонансных гравитационных антенн (РГА) является режим быстрой фильтрации (fast filtering) [1, 2]. В этом режиме осуществляется когерентная обработка на низких частотах по аналоговому «гауссовому» прототипу.

Спектр узкополосного случайного процесса $x(t)$ на выходе линейного тракта РГА ограничен узкой полосой $(\omega_0 \mp \delta\omega)$, $\delta\omega \ll \omega_0$. Воспользовавшись комплексной формой записи произвольных квазигармонических колебаний [3, 4], можем представить случайный узкополосный процесс $x(t)$ в виде

$$x(t) = \mathrm{Re}\,[\widetilde{x}(t)\exp\{j\omega_0 t\}]\,,$$

где $\widetilde{x}(t)$ — комплексная огибающая, спектр которой сосредоточен в полосе $(-\delta\omega, \delta\omega)$.

Пусть $\lambda = (0,1)$ — параметр обнаружения. Тогда

$$\widetilde{x}(t) = \lambda\widetilde{s}(t) + \widetilde{n}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\widetilde{s}(t)$ и $\widetilde{n}(t)$ — комплексные огибающие полезного узкополосного сигнала $s(t)$ и аддитивной квазигармонической негауссовой помехи $n(t)$.

На практике информация о вероятностных свойствах коррелированных (окрашенных) негауссовых шумов $n(t)$ обычно ограничивается такими доступными для измерения характеристиками, как одномерная плотность вероятности $W_n(n)$ и спектральная плотность $N_n(\omega)$. В условиях подобной априорной неопределенности для защиты гауссова приемника [3] используются [5, 6] амплитудно-частотный и частотно-амплитудный алгоритмы подавления коррелированных негауссовых шумов. Наибольшее распространение на практике получил амплитудно-частотный алгоритм, который при детерминированном полезном сигнале определяется следующей схемой:

$$\text{БНП—ОФ—СФ}, \tag{1}$$

где БНП — безынерционный нелинейный преобразователь с оптимальной по критерию сигнал/шум характеристикой

$$\Gamma_0[x] = W_n'(x)/W_n(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

ОФ и СФ — обеляющий и согласованный фильтры (при частотно-амплитудном алгоритме БНП помещается на выходе линейного декоррелятора — ОФ).

Необходимая информация о полезном узкополосном сигнале $s(t)$ и аддитивной квазигармонической негауссовой помехе $n(t)$ полностью содержится в квадратурных компонентах

$$\begin{cases} a(t) = \mathrm{Re}\,\widetilde{x}(t) = \lambda a_s(t) + a_n(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ b(t) = \mathrm{Im}\,\widetilde{x}(t) = \lambda b_s(t) + b_n(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $a_s(t)$, $b_s(t)$ и $a_n(t), b_n(t)$ — квадратурные составляющие полезного сигнала $s(t)$ и аддитивной помехи $n(t)$ соответственно.

В предлагаемой работе рассматриваются особенности амплитудно-частотного подавления коррелированных негауссовых шумов $n(t)$ на выходе линейного тракта РГА при совместной обработке реализаций квадратурных компонент $a(t)$ и $b(t)$.

Плотность вероятности квадратурных компонент при узкополосном негауссовом шуме

Пусть $W_{2\lambda}(a, b; t)$ — совместная плотность вероятности случайных процессов $a(t)$ и $b(t)$ в состоянии λ; при стационарной помехе $W_{20}(a, b; t) = W_{20}(a, b)$. Тогда при обнаружении слабого детерминированного сигнала имеем

$$W_{21}(a, b; t) = W_{20}[a - a_s(t), b - b_s(t)] \approx \\ \approx W_{20}(a, b)[1 + \Psi(a, b; t)].$$

Здесь

$$\Psi(a,b;t) = -\left\{ a_s(t)\Gamma_1[a,b] + b_s(t)\Gamma_2[a,b] \right\},$$
$$\Gamma_1[a,b] = \frac{1}{W_{20}(a,b)}\frac{\partial W_{20}(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\ln W_{20}(a,b),$$
$$\Gamma_2[a,b] = \frac{1}{W_{20}(a,b)}\frac{\partial W_{20}(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\ln W_{20}(a,b). \qquad (2)$$

При вычислении совместной плотности вероятности $W_{20}(a,b)$ воспользуемся вероятностными свойствами огибающей $r_n(t) = |\widetilde{n}(t)|$ и приведенной к интервалу $(0,2\pi)$ фазы $\varphi_n(t) = \arg\widetilde{n}(t)$ узкополосной негауссовой помехи $n(t)$ [6]. При таком подходе совместная плотность вероятности случайных процессов $E_n(t) = r_n^2(t)$ и $\psi_n(t)$ в совпадающие моменты времени определяется следующим выражением:

$$W_{E\varphi}(E,\varphi) = \frac{1}{2\pi}W_e(E), \qquad (3)$$

где $W_e(E)$ — одномерная плотность вероятности случайного процесса $E_n(t)$. Из (3) при замене переменных $a_n(t) = \sqrt{E_n(t)}\cos\varphi_n(t)$, $b_n(t) = \sqrt{E_n(t)}\sin\varphi_n(t)$ находим

$$W_{20}(a,b) = \frac{1}{\pi}W_e(a^2+b^2), \quad -\infty < a, b < \infty. \qquad (4)$$

Подстановка (4) в (2) приводит к следующему результату:

$$\begin{cases} \Gamma_1[a,b] = 2aF[E], \quad \Gamma_2[a,b] = 2bF[E], \\ F[E] = \dfrac{1}{dE}\ln W_e(E), \quad E = a^2+b^2. \end{cases} \qquad (5)$$

Приближение негауссова белого шума

Необходимая информация о сигнале и шуме в режиме быстрой фильтрации содержится в векторном случайном процессе

$$\boldsymbol{w}(t) = [a(t)\ b(t)]^T.$$

При обнаружении слабого гравитационного сигнала в дискретном времени обработке подвергается выборка $[\boldsymbol{w}(t_1),\ldots,\boldsymbol{w}(t_M)]$. Оптимальный алгоритм (решающее правило) обнаружения детерминированного полезного сигнала в подобной ситуации определяется следующим выражением [3, 5, 6]

$$\lambda = 1\colon\ \ln\frac{W_{2M}[\boldsymbol{w}(t_1),\ldots,\boldsymbol{w}(t_M)|\lambda=1]}{W_{2M}[\boldsymbol{w}(t_1),\ldots,\boldsymbol{w}(t_M)|\lambda=0]} \geqslant \ln c, \qquad (6)$$

где $W_{2M}[\boldsymbol{w}(t_1),\ldots,\boldsymbol{w}(t_M)|\lambda]$ — совместная плотность вероятности элементов выборки $[\boldsymbol{w}(t_1),\ldots,\boldsymbol{w}(t_M)|\lambda]$ в состоянии $\lambda = (0,1)$, c — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества.

В статистической радиотехнике [7] разработаны различные методы измерения (оценивания) одномерной плотности вероятности $W_e(E)$. Поэтому на практике совместная плотность вероятности $W_{20}(a,b)$ (4) случайных процессов $a_n(t)$ и $b_n(t)$ в совпадающие моменты времени может считаться известной. В то же время построение непараметрических оценок многомерных плотностей вероятности сталкивается с большими трудностями. Поэтому в дальнейшем совместная плотность вероятности $W_{2M}(\cdot)$ при $M \geqslant 2$ предполагается полностью неизвестной.

Для преодоления подобной априорной неопределенности на практике часто используется приближение (модель) негауссова белого шума [6] — случайного процесса с независимыми значениями. При таком подходе

$$W_{2M}[\boldsymbol{w}(t_1),\ldots,\boldsymbol{w}(t_M)|\lambda=1] = \prod_{k=1}^{M} W_{2\lambda}(a_k,b_k;t_k). \qquad (7)$$

Из (4), (6) и (7) при обнаружении слабого гравитационного сигнала находим

$$\lambda = 1\colon\ \sum_{k=1}^{M}\Psi(a_k,b_k;t_k) \geqslant \ln c. \qquad (8)$$

Пусть

$$y_1(t) = \Gamma_1[a(t),b(t)] \quad \text{и} \quad y_2(t) = \Gamma_2[a(t),b(t)]. \qquad (9)$$

Тогда решающее правило (8) можно представить в виде

$$\lambda = 1:\ -\sum_{k=1}^{M}[y_1(t_k)a_s(t_k) + y_2(t_k)b_s(t_k)] \geqslant \ln c.$$

Для формирования реализаций случайных процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ (9) можно использовать БНП с характеристиками $\Gamma_1[a,b]$ и $\Gamma_2[a,b]$, определяемыми выражением (5).

На практике замена (аппроксимация) реального коррелированного векторного случайного процесса $\boldsymbol{w}(t)$ негауссовым белым шумом с многомерной плотностью вероятности (7) обеспечивает нижнюю границу характеристик обнаружения. Значительного улучшения показателей качества обнаружения можно достигнуть, если по аналогии со схемой (1) для совместной обработки реализаций случайных процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ воспользоваться гауссовой схемой обнаружения детерминированных векторных сигналов на фоне коррелированных гауссовых помех [3].

Гауссова схема обработки векторного сигнала

При обнаружении слабых гравитационных импульсов в непрерывном времени имеем

$$\boldsymbol{y}(t) = \lambda\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t)\ \ y_2(t)]^T$ — векторный случайный процесс, представляющий смесь аддитивной помехи $\boldsymbol{f}(t) = [f_1(t)\ f_2(t)]^T$ с корреляционной матрицей

$$\boldsymbol{K}(\tau) = \left\langle \boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{f}^T(t+\tau)\right\rangle = \begin{bmatrix} K_{11}(\tau) & K_{12}(\tau) \\ K_{21}(\tau) & K_{22}(\tau)\end{bmatrix} \qquad (10)$$

и полезного сигнала $\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t)\ u_2(t)]^T$.

Здесь

$$\begin{aligned} K_{il}(\tau) &= \langle f_i(t+\tau) f_l(\tau)\rangle, \\ f_i &= y_i(t|\lambda=0), \quad i,l=1,2; \\ u_i(t) &= \langle y_i(t)|\lambda=1\rangle = \\ &= -[a_s\langle f_i(t)f_1(t)\rangle + b_s(t)\langle f_i(t)f_2(t)\rangle], \end{aligned} \tag{11}$$

где $\langle\cdot\rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения.

При вычислении элементов корреляционной матрицы (10) воспользуемся тонкой структурой случайной фазы

$$\Phi_n(t) = \varphi_n(t) + 2\pi\nu(t)$$

аддитивной негауссовой помехи $n(t)$, $\varphi_n(t)$ — разрывный случайный процесс, значения которого заключены внутри интервала $(0, 2\pi)$, $\nu(t)$ — случайная последовательность биполярных импульсов целочисленными высотами, обусловленная перескоками (скачками) фазы. При таком подходе

$$\Phi_n(t) = \Delta\Phi_n(t) + \varphi_0, \quad \Delta\Phi_n(t) = \int_0^t \Omega_n(t)\, dt$$

— набег фазы, $\Omega_n(t) = \Phi_n'(t)$ — девиация частоты, φ_0 — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 2\pi)$. Следовательно,

$$\begin{cases} a_n(t) = \sqrt{E_n(t)}\cos[\Delta\Phi_n(t) + \varphi_0], \\ b_n(t) = \sqrt{E_n(t)}\sin[\Delta\Phi_n(t) + \varphi_0]. \end{cases}$$

Подставляя эти формулы в выражение (12), после усреднения по начальной фазе φ_0 имеем

$$\begin{aligned} &K_{11}(\tau) = K_{22}(\tau), \\ &K_{21}(\tau) = K_{12}(-\tau) = -K_{12}(\tau), \\ &K_{12}(0) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \langle f_{ii}^2(t)\rangle = K_{ii}(0) = 2\langle EF^2[E]|\lambda=0\rangle = \sigma^2, \\ \qquad \langle f_1(t)f_2(t)\rangle = 0; \\ u_1(t) = -\sigma^2 a_s(t), \quad u_2 = -\sigma^2 b_s(t). \end{cases}$$

Для гауссовых помех при детерминированном полезном сигнале оптимальный алгоритм обнаружения и алгоритм оптимальной линейной фильтрации по критерию сигнал/шум совпадают. Поэтому, учитывая результаты [3], относящиеся к обнаружению векторных сигналов на фоне коррелированных гауссовых шумов, находим оптимальную по критерию сигнал/шум линейную схему обработки реализаций случайных процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с помощью корреляционного приемника

$$z = \int_0^T \sum_{i=1}^{2} y_i(t) r_i(t)\, dt. \tag{12}$$

Опорные (весовые) сигналы $r_1(t)$ и $r_2(t)$ являются решением системы линейных интегральных уравнений

$$\int_0^T \sum_{l=1}^{2} K_{il}(t-\tau) r_l(\tau)\, d\tau = s_i, \quad i,l = 1,2. \tag{13}$$

Отношение сигнал/шум на выходе корреляционного приемника (12) определяется следующим выражением [3]:

$$q_z = \int_0^T \sum_{i=1}^{2} u_i(t) r_i(t)\, dt.$$

Выводы

1. Переход $x(t) \to \widetilde{x}(t) \to a(t), b(t)$ в режиме «fast filtering» осуществляется в процессе дискретизации данных [1, 2] по схеме

$$x(t) \to \text{АЦП—ЦФ—ЦАП} \to \boldsymbol{w}(t),$$

где АЦП — аналого-цифровой преобразователь, ЦФ — цифровой полосовой фильтр, ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь. Реализация векторного случайного процесса $\boldsymbol{w}(t) = [a(t)\ \ b(t)]^T$ на выходе ЦАП при первичной обработке информации используется для формирования параметрической (непараметрической) оценки плотности вероятности $W_e(E)$ квадрата огибающей $E(t) = a^2(t) + b^2(t)$ в состоянии $\lambda = 0$.

2. Векторный алгоритм амплитудно-частотного подавления негауссовых шумов на выходе линейного тракта РГА при совместной обработке квадратурных компонент $a(t)$ и $b(t)$ определяется следующим выражением

$$\boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{y}(t) \to \int_0^T \boldsymbol{y}^T(t)\boldsymbol{r}(t)\, dt, \tag{14}$$

где $y_{1,2}(t) = \Gamma_{1,2}[a(t), b(t)]$, $\boldsymbol{r}(t) = [r_1(t)\ \ r_2(t)]^T$ — весовой вектор-столбец. Характеристики $\Gamma_{1,2}[a,b]$ и весовые коэффициенты $r_{1,2}(t)$ вычисляются по формулам (5) и (13).

При частотно-амплитудном подавлении коррелированных негауссовых помех по схеме [5, 6] ОФ–БНП–СФ осуществляется предварительная декорреляция шума с помощью линейного ОФ. На практике размещение БНП на выходе ОФ считается нецелесообразным [6], поэтому такая схема в работе не рассматривается.

3. Векторный алгоритм обработки информации (14) можно использовать для обнаружения слабых гравитационных импульсов с неизвестным моментом возникновения τ_s при фильтрационном варианте гауссова приемника [3].

4. Будем предполагать, что полезный гравитационный сигнал $s(t)$ полностью расположен на интервале наблюдения $(0, T)$, длительность которого

значительно превышает время корреляции стационарных и стационарно-связанных процессов $n_1(t)$ и $n_2(t)$. Тогда, учитывая (13), имеем

$$\sum_{m=1}^{2} K_{im}(t) r_m(t) = s_i(t), \quad i = 1, 2.$$

В частотной области система линейных интегральных уравнений типа свертки (13) переходит в систему линейных алгебраических уравнений типа

$$\sum_{m=1}^{2} \dot{K}_{im}(j\omega) \dot{r}_m(t) = \dot{s}_i(j\omega), \quad i = 1, 2,$$

где $\dot{K}_{im}(j\omega) \leftrightarrow K_{im}(\tau)$, $\dot{r}_m(j\omega) \leftrightarrow r_m(t)$, $\dot{s}_m(j\omega) \leftrightarrow s_m(t)$.

В условиях априорной неопределенности неизвестные взаимные энергетические спектры $\dot{K}_{im}(j\omega)$ заменяются непараметрическими оценками $\widehat{\dot{K}}_{im}(j\omega)$ [8].

Литература

1. *Astone P., Buttiglione S., Frasca S.* et al. // Nuovo Cimento. 1997. **20C**, N 1. P. 9.
2. *Rudenko V.N., Gusev A.V.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2000. **9**, N 3. P. 353.
3. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
4. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1986.
5. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М., 1999.
6. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А.* и др. Теория обнаружения сигналов. М., 1984.
7. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М., 1982.
8. *Куликов Е.И.* Методы измерения случайных процессов. М., 1986.

Поступила в редакцию
11.10.06