

УДК 524.8-337

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ ПАМЯТИ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА ВО ВСЕЛЕННОЙ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Д. А. Грачев

(кафедра математики)

E-mail: gdmath@mail.ru

Уравнение Якоби на геодезической риманова многообразия со случайной кривизной описывает распространение света во Вселенной с неоднородностями. В рамках модели с постепенной потерей памяти получена формула для эффективной кривизны пространства. Показано, что эта кривизна является отрицательной при любой величине корреляционного радиуса. Результаты сравниваются с известными результатами, полученными в рамках модели с кусочно-постоянной случайной кривизной, а также модели с малым радиусом корреляций кривизны.

Введение

Вселенная в больших масштабах обладает исключительной степенью однородности и изотропии, однако в малых масштабах она неоднородна и анизотропна из-за концентрации материи в небесных телах. Еще в 1964 г. Я. Б. Зельдович показал, что флуктуации плотности, вызванные такими неоднородностями, приводят к небольшому систематическому искажению космологических тестов, которые делают Вселенную [1], гауссова кривизна пространственного сечения которой в среднем равна нулю, в известной степени похожей на открытую космологическую модель.

Эффект Зельдовича мало связан с динамикой расширения Вселенной, а представляет собой некоторый факт геометрии пространственного сечения [1]. Более того, он представляет факт геометрии двумерного среза пространственного сечения, которое определяется направлением на наблюдаемый объект и его ориентацией. С геометрической точки зрения эффект Зельдовича, как и некоторые другие факты, связанные с космологическими тестами, удобно описывать в терминах полей Якоби на геодезических пространственного сечения, вдоль которых и распространяются лучи света.

Поле Якоби $y(x)$ (здесь x — расстояние вдоль некоторой геодезической) однозначно определяется гауссовой кривизной $K(x)$, которая считается случайной и представимой в виде $K(x) = \bar{K} + k(x)$, где \bar{K} — средняя кривизна, которая не зависит от x ввиду статистической однородности Вселенной, а член $k(x)$ описывает случайные флуктуации кривизны пространственного сечения, вызванные флуктуациями плотности. Поскольку мы имеем дело со случайным полем, заданным вдоль некоторой геодезической, естественно рассмотреть среднюю

величину $\mathcal{Y} = \langle y \rangle$. Физический смысл среднего поля Якоби состоит в следующем: величина $\mathcal{Y}(x)\theta$ представляет собой средний линейный размер объектов с угловым размером θ , расположенных во Вселенной на расстоянии x от наблюдателя.

Как показано в [2], среднее поле Якоби \mathcal{Y} можно найти из уравнения

$$y'' + \mathcal{Y}\left(\bar{K} - \frac{\mathcal{K}}{6}\right) = 0. \quad (1)$$

При выводе (1) использовалась модель случайной кривизны с обновлением (она описана ниже), в которой длина интервала обновления δ устремлялась к нулю. При этом приходится считать, что флуктуации кривизны становятся большими, так чтобы среднее $\langle k^2 \delta^2 \rangle \rightarrow \mathcal{K}$ при $\delta \rightarrow 0$. Тем самым при любом соотношении между \bar{K} и \mathcal{K} кривизна K меняет знак, в результате чего остается неясным, с чем связан эффект Зельдовича — с наличием на геодезической участков с отрицательной кривизной или же с наличием небольших флуктуаций. Для того чтобы прояснить этот вопрос, необходимо отказаться от короткокоррелированного приближения и рассмотреть модель с малым, но конечным δ . Это и составляет содержание настоящей работы. Теперь вместо дифференциального уравнения (1) для среднего поля Якоби приходится рассматривать разностное (алгебраическое) уравнение. Однако удастся показать, что среднее поле Якоби по-прежнему растет экспоненциально со скоростью, определяемой соотношениями того же характера, что и для короткокоррелированной модели. Другими словами, эффект Зельдовича действительно связан с малыми флуктуациями кривизны, а обращения ее знака при выводе уравнений в короткокоррелированной модели несущественны.

1. Уравнение Якоби и случайная кривизна

Здесь мы дадим формальное определение поля Якоби и опишем модель случайного процесса с обновлением.

Пусть на двумерном римановом многообразии M^2 задано двупараметрическое семейство геодезических $\gamma(\theta, x)$, пересекающихся в заданной точке $P \in M^2$. При этом x — длина вдоль геодезических, а θ — угол, отсчитываемый в точке P от определенной базовой геодезической Γ этого семейства, для которой $\theta = 0$. Тогда расстояние между точками, находящимися на близких геодезических на расстоянии x от точки P , равно (с точностью до малых высшего порядка) $y(x)\theta$, где $y(x)$ и есть, по определению, поле Якоби вдоль базовой геодезической Γ . Поле Якоби можно найти из уравнения Якоби (см. [3]), которое также называют уравнением отклонений геодезических,

$$y'' + K(x)y = 0. \tag{2}$$

Здесь $K(x)$ — гауссова кривизна, а производные берутся по расстоянию x от начальной точки P . Уравнение Якоби дополняется естественными начальными условиями $y(0) = 0$ (все геодезические семейства выпущены из одной точки) и $y'(0) = 1$ (условие нормировки).

Очевидно, что изучение уравнения (2) требует конструктивного описания случайного процесса $K(x)$. Мы выбираем это описание, ориентируясь на модели, удобные для аналитических исследований (а именно на уже упоминавшиеся модели с обновлением).

Пусть полупрямая $x \geq 0$ разбита на равные отрезки длины δ (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть процесс $K(x)$ теряет память точно в точках $x_n = n \cdot \delta$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это означает, что величины $K_n(x)$ на полусегментах $[0; \delta), \dots, [n\delta; (n+1)\delta)$ предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (а именно среднее значение, дисперсию, корреляционную функцию и т. д.). Кроме того, предполагается статистическая независимость точек обновления от всех процессов $K_n(x)$. Эта модель и есть модель процесса с обновлением. В общем случае из-за фиксированных точек обновления такой случайный процесс статистически неоднороден (в масштабах, сопоставимых с δ), и корреляционная функция $\langle K(x_1), K(x_2) \rangle$ зависит от обеих точек x_1 и x_2 .

2. Среднее поле Якоби и эффекты памяти

Отметим, что непосредственное усреднение уравнения (2) затруднительно, поскольку оно содержит произведение $K(x)y$, в котором сомножители зависимы. Однако описанная модель случайного

процесса с обновлением позволяет преодолеть эту трудность.

Перепишем (2) в виде системы линейных уравнений для двухкомпонентного вектора-строки \mathbf{z} с компонентами $z_1 = y$, $z_2 = \delta y'$:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{z} \begin{pmatrix} 0 & -\delta \cdot K(x) \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь мы умножили y' на δ для того, чтобы придать компонентам вектора \mathbf{z} одинаковую размерность. Начальные условия имеют вид

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = \delta.$$

Тогда

$$\mathbf{z}(x_n) = \mathbf{z}(x_{n-1})B_n = \dots = \mathbf{z}_0 B_1 \dots B_{n-1} B_n, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0. \tag{4}$$

Здесь матрица B_n является фундаментальной матрицей системы (3), т.е. матрицей, обладающей свойством $\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(s)B(s, x)$ при $s < x$, а формула (4) получается благодаря ее мультипликативному свойству $B(x_0, x_n) = B(x_0, x_1) \dots B(x_{n-1}, x_n)$. В общем случае, когда кривизна является кусочно-непрерывной случайной функцией, явное выражение для фундаментальной матрицы будет содержать так называемый мультипликативный интеграл (известный в квантовой теории поля как T -экспонента)

$$B_i = \prod_{u=(i-1)\delta}^{i\delta} \left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta \cdot K(u) \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix} du \right], \tag{5}$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размера 2×2 . Многие важные свойства мультипликативного и обычного аддитивного интегралов совпадают, в частности и тот и другой существуют для любой кусочно-непрерывной функции. Ниже нам потребуется представление мультипликативного интеграла в виде бесконечной суммы аддитивных интегралов (см. [4])

$$\prod_{u=a}^b (\mathbf{I} + \mathbf{A}(u) du) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \dots \int_{a \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k \leq b} \mathbf{A}(\tau_1) \dots \mathbf{A}(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k. \tag{6}$$

Отметим, что в (6) интегрирование ведется по k -мерной пирамиде (при $k = 1$ пирамида вырождается в отрезок, а при $k = 2$ — в треугольник).

Положим в (4) $x_n = n\delta$, тогда вектор $\mathbf{z}(n\delta)$ представим в виде

$$\mathbf{z}(n\delta) = \mathbf{z}(0)B_1 \dots B_{n-1}B_n. \tag{7}$$

Как следует из (5), каждая матрица в (7) зависит только от распределения кривизны между точками обновления $(i-1)\delta$ и $i\delta$; тем самым все B_i

статистически независимы и имеют одинаковое вероятностное распределение. Данное обстоятельство позволяет провести усреднение (7):

$$\langle \mathbf{z}(n\delta) \rangle = \langle \mathbf{z}(0) \rangle \langle B_1 \rangle^n. \quad (8)$$

Нахождение матрицы B_1 при помощи формулы (6) облегчается тем, что вычисления достаточно вести лишь с точностью до членов порядка квадрата кривизны. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\langle B_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \delta^2 \bar{K} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} + \delta^4 \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{1,3}^4 & \mathcal{K}_{1,3}^3 \\ \mathcal{K}_{2,4}^5 & \mathcal{K}_{2,4}^4 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\mathcal{K}_{i,j}^l = \frac{1}{\delta^l} \int \dots \int_{0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_l \leq \delta} c(\tau_j - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_l. \quad (10)$$

Подынтегральное выражение $c(\tau_j - \tau_i)$ в (10) является корреляционной функцией кривизны $\langle K(\tau_i)K(\tau_j) \rangle$.

Чтобы исследовать поведение вектора $\langle \mathbf{z} \rangle$, найдем из характеристического уравнения для матрицы $\langle B_1 \rangle$ главное собственное значение λ . Пренебрегая малыми высшего порядка и учитывая, что в (9) $\mathcal{K}_{1,3}^4 = \mathcal{K}_{2,4}^4$, получим

$$\lambda = 1 + \delta \sqrt{-\bar{K} + \delta^2 \mathcal{K}_{1,3}^3}. \quad (11)$$

Отметим, что матричные элементы $\mathcal{K}_{1,3}^4$, $\mathcal{K}_{2,4}^4$ и $\mathcal{K}_{2,4}^5$ существенной роли не играют, так как при решении характеристического уравнения перед ними возникают коэффициенты существенно большего порядка по δ , нежели порядок нормировки l в (10) (напомним, что мы рассматриваем длину интервала обновления хоть и конечной, но малой).

Используя (11), несложно получить разностное уравнение для среднего поля Якоби. При достаточно больших n величина $\langle y \rangle$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \langle y(n\delta) \rangle - \langle y((n-1)\delta) \rangle = \\ = \delta \sqrt{-\bar{K} + \delta^2 \mathcal{K}_{1,3}^3} \langle y((n-1)\delta) \rangle, \\ \langle y'(n\delta) \rangle - \langle y'((n-1)\delta) \rangle = \\ = \delta \sqrt{-\bar{K} + \delta^2 \mathcal{K}_{1,3}^3} \langle y'((n-1)\delta) \rangle, \end{cases}$$

которая заменой $\langle y(n\delta) \rangle - \langle y((n-1)\delta) \rangle$ на $\delta \langle y'((n-1)\delta) \rangle$ может быть сведена к уравнению

$$\frac{\langle y'(n\delta) \rangle - \langle y'((n-1)\delta) \rangle}{\delta} + (\bar{K} - \delta^2 \mathcal{K}_{1,3}^3) \langle y((n-1)\delta) \rangle = 0. \quad (12)$$

Разностное уравнение (12) похоже на уравнение (1), а роль эффективной кривизны пространства K_{eff} теперь играет величина $-\delta^2 \mathcal{K}_{1,3}^3$.

Вычислим матричный элемент $\mathcal{K}_{1,3}^3$. Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1,3}^3 &= \frac{1}{\delta^3} \int_0^\delta \left(\int_0^{\tau_1} \left(\int_0^{\tau_2} c(\tau_1 - \tau_3) d\tau_3 \right) d\tau_2 \right) d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{\delta^3} \int_0^\delta \left(\int_0^{\tau_1} \left(\int_{\tau_3}^{\tau_1} c(\tau_1 - \tau_3) d\tau_2 \right) d\tau_3 \right) d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{\delta^3} \int_0^\delta \left(\int_0^{\tau_1} c(\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) d\tau_3 \right) d\tau_1. \quad (13) \end{aligned}$$

Переходя в (13) к новым переменным $t = \tau_1 - \tau_3$, $\tau_3 = \tau_3$ и учитывая, что якобиан отображения $(\tau_3, \tau_1) \mapsto (\tau_3, t)$ равен единице, получим

$$\mathcal{K}_{1,3}^3 = \frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta c(t)t dt - \frac{1}{\delta^3} \int_0^\delta c(t)t^2 dt. \quad (14)$$

Отметим, что при вычислении этого матричного элемента в [2] допущена неточность, которую мы здесь исправили.

Для нахождения в явном виде эффективной кривизны требуется задать корреляционную функцию $c(t)$. Выберем ее ради определенности в виде $c(t) = \langle K^2 \rangle \exp(-t^2/r_0^2)$, где $r_0 \in (0, \delta)$ — корреляционный радиус, величина которого и определяет эффекты памяти в рассматриваемой модели. Подставляя $c(t)$ в (14), мы приходим к результату

$$K_{\text{eff}} = -\frac{r_0^2 \langle K^2 \rangle}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi} r_0}{2\delta} \text{erf}(\delta/r_0) \right), \quad (15)$$

где $\text{erf}(\cdot)$ — функция ошибок.

3. Обсуждение

Итак, мы отказались от условия короткокоррелированности, добавив в описание флуктуаций кривизны эффекты памяти. Это привело к усложнению уравнения для среднего поля Якоби — оно стало разностным. Однако, как и дифференциальное уравнение (1), оно описывается эффективным значением кривизны K_{eff} , приводящим к некоторому уменьшению осредненного значения \bar{K} . В этом смысле уравнение для среднего поля Якоби оказывается устойчивым по отношению к усложнению модели. Еще одним аргументом в пользу указанной устойчивости являются результаты численного моделирования решений уравнения Якоби [5, 6].

Отметим, что формула (15) получена для совершенно произвольных $0 < r_0 < \delta$. При $r_0 \ll \delta$ и $\bar{K} = 0$ выражение (15) переходит в полученное в [2] соотношение $K_{\text{eff}} = -\frac{r_0^2 \langle K^2 \rangle}{2}$.

Автор благодарен Д. Д. Соколову за обсуждение текста и сделанные замечания.

Литература

1. Зельдович Я.Б. // Астрон. журн. 1964. **41**. С. 19.
2. *Lambert V.G., Sokoloff D.D., Tutubalin V.N.* // *Astrophysics and Space Science*. 2005. **298**. P. 409.
3. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 2004.
5. Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д. // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. С. 172.
6. Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д. // Астрон. журн. 2005. **82**, № 7. С. 584.

Поступила в редакцию
26.03.07