

УДК 530.145

ДИНАМИКА ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ТЕОРИИ С НАРУШЕННОЙ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬЮ

А. Е. Лобанов, Е. М. Мурчигова

(кафедра теоретической физики)

E-mail: lobanov@phys.msu.ru

Получены решения уравнения Дирака для частиц, взаимодействующих с векторным, аксиально-векторным и тензорным конденсатами в рамках расширенной стандартной модели. Рассмотрен вопрос о применимости этих решений для описания поведения нейтрино в плотной среде и электромагнитном поле.

В настоящее время считается, что стандартная модель элементарных частиц является низкоэнергетическим пределом более фундаментальной теории, объединяющей все известные физические взаимодействия. Поэтому весьма актуальным представляется исследование эффектов, которые не могут быть описаны в рамках стандартной модели. Один из таких возможных эффектов — нарушение лоренц-инвариантности, которое следует при определенных допущениях из теории струн [1, 2].

На текущий момент наиболее разумным для изучения такого рода эффектов представляется подход, получивший название «расширенная стандартная модель» [3–5].

Основная идея данного подхода — включение в лагранжиан стандартной модели членов, которые феноменологически описывают взаимодействие с вакуумными конденсатами или внешними полями и формально нарушают лоренц-инвариантность теории. Известно, что наличие таких членов в лагранжиане может открывать каналы реакций, которые в обычном подходе закрыты [6]. Причем установить это возможно только при расчетах в картине Фарри, позволяющей точно учитывать влияние внешних полей или вакуумных конденсатов. Вследствие этого принципиальное значение приобретает нахождение точных решений уравнений, следующих из данной модели.

Задача о решении уравнений, отвечающих полному лагранжиану расширенной стандартной модели [4], крайне сложна. Поэтому в настоящей работе рассматриваются решения уравнения Дирака в теории, учитывающей влияние только тензорного, векторного и аксиально-векторного конденсатов на фермионы. В этом случае уравнение Дирака может быть записано в виде

$$\left(i\hat{\partial} - \hat{a} - \hat{b}\gamma^5 - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - m \right) \Psi = 0. \quad (1)$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, а a^μ, b^μ — 4-векторы, описывающие взаимодействие с указанными конденсатами; $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Будем считать $F^{\mu\nu}$, a^μ и b^μ постоянными величинами, что обычно и делается при исследовании процессов в расширенной стандартной модели. В этом случае операторы канонического импульса частицы $i\partial^\mu$ являются интегралами движения и могут служить для классификации решений. Однако физическому смыслу задачи в большей степени соответствуют решения, которые определяются заданием кинетического импульса. Именно такие решения и будут рассмотрены в настоящей статье. Надо отметить, что в случае наличия только тензора $F^{\mu\nu}$ искомые решения были получены в работе [7], а при наличии 4-вектора b^μ — в работе [8].

Следуя методике указанных работ, будем искать решения уравнения (1) в виде

$$\Psi(x) = e^{-iF(x)}U(\tau, x, \tau_0 = 0)\Psi_0(x). \quad (2)$$

В этой формуле $U(\tau, x)$ — резольвента классического уравнения эволюции спина (уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди [9]) в биспинорном представлении [7, 10], $e^{-iF(x)}$ — некоторый фазовый множитель, а

$$\Psi_0(x) = e^{-iqx}(\hat{q} + m)(1 - \gamma^5\hat{S}_0)\psi_0 \quad (3)$$

— решение уравнения Дирака для свободной частицы (ψ_0 — произвольный постоянный биспинор, нормированный таким образом, что $\bar{\Psi}_0(x)\Psi_0(x) = m/q_0$).

Резольвента $U(\tau, x)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{U}(\tau, x) = \\ = \left\{ \frac{i}{2m}\gamma^5(\hat{b}\hat{q} - \hat{q}\hat{b}) + \frac{i}{m^2}\gamma^5 H^{\mu\nu}q_\nu\gamma_\mu\hat{q} \right\} U(\tau, x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $H^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$ — тензор, дуальный тензору $F^{\mu\nu}$, а точка обозначает дифференцирование по собственному времени τ . В формулах (3), (4) q^μ — постоянный 4-вектор, обладающий свойством $q^2 = m^2$, в силу которого его можно интерпретировать как кинетический импульс частицы. Очевидно, что ре-

шение уравнения (4) представляет собой матричную экспоненту

$$U(\tau, \tau_0) = \exp \left\{ i(\tau - \tau_0) \times \left[\frac{1}{2m} \gamma^5 (\hat{b}\hat{q} - \hat{q}\hat{b}) + \gamma^5 \frac{H^{\mu\nu}}{m^2} q_\nu \gamma_\mu \hat{q} \right] \right\}. \quad (5)$$

Подстановка выражения (2) в уравнение (1) с учетом (4) приводит к соотношению

$$\left\{ \hat{q} + \hat{\partial}F(x) - \hat{a} + \gamma^5 \hat{b} + \right. \\ \left. + \gamma^5 \hat{N} \left[\frac{1}{2m} (\hat{b}\hat{q} - \hat{q}\hat{b}) + \frac{1}{m^2} H^{\mu\nu} q_\nu \gamma_\mu \hat{q} \right] - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} F^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - m \right\} e^{-iF(x)} U(\tau(x), \tau_0) \Psi_0(x) = 0,$$

где $N^\mu = \partial^\mu \tau$. Так как матрица $U(\tau(x), \tau_0)$ невырождена и, очевидно, $[U(\tau(x), \tau_0), \hat{q}] = 0$, то для выполнения этого соотношения необходимо выполнение условия

$$\hat{\partial}F(x) - \hat{a} + \gamma^5 \hat{b} + \\ + \gamma^5 \hat{N} \left[\frac{1}{2m} (\hat{b}\hat{q} - \hat{q}\hat{b}) + \frac{1}{m^2} H^{\mu\nu} q_\nu \gamma_\mu \hat{q} \right] - \frac{i}{2} F^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 0.$$

Приравняв к нулю коэффициенты при линейно независимых элементах алгебры матриц Дирака, получаем

$$\partial^\mu F(x) = a^\mu$$

и систему уравнений для определения вектора N^μ

$$\varphi^\mu (m - (Nq)) + (N\varphi)q^\mu = 0, \quad (6) \\ F^{\mu\alpha} q_\alpha = -e^{\mu\nu\rho\lambda} N_\nu \varphi_\rho q_\lambda,$$

где $\varphi^\mu = b^\mu + H^{\mu\nu} q_\nu / m$.

Нетрудно убедиться, что для совместности этой системы необходимо, чтобы

$$q_\mu F^{\mu\nu} H_{\nu\alpha} q^\alpha + m q_\mu F^{\mu\nu} b_\nu = 0. \quad (7)$$

Так как q^μ принимает, вообще говоря, произвольные значения, то, для того чтобы (7) выполнялось тождественно, необходимо потребовать выполнения условий

$$F^{\mu\alpha} H_{\alpha\nu} \equiv -\frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = 0, \quad F^{\mu\nu} b_\nu = 0. \quad (8)$$

Следовательно, решение уравнения (1) может иметь вид (2) только в том случае, если тензор $F^{\mu\nu}$ — плоский, т.е. его второй инвариант $I_2 = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$ равен нулю, а вектор b^μ является его собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению^{*)}.

^{*)} Следует отметить, что наличие у антисимметричного тензора собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению, возможно тогда и только тогда, когда этот тензор плоский.

Для нахождения N^μ разложим входящие в уравнения (6) векторы по ортогональному базису в пространстве Минковского:

$$n_0^\mu = q^\mu / m, \quad n_1^\mu = \frac{H^{\mu\nu} q_\nu}{\sqrt{\mathcal{N}}}, \quad n_2^\mu = \frac{F^{\mu\nu} q_\nu}{\sqrt{\tilde{\mathcal{N}}}}, \\ n_3^\mu = \frac{m^2 H^{\mu\nu} H_{\nu\alpha} q^\alpha - q^\mu \mathcal{N}}{m \sqrt{\mathcal{N} \tilde{\mathcal{N}}}}$$

и воспользуемся соотношениями^{*)}

$$(\varphi q) H^{\mu\nu} = m(\varphi^\mu b^\nu - b^\mu \varphi^\nu), \quad \mathcal{N} - \tilde{\mathcal{N}} = 2m^2 I_1, \\ ((b\varphi)^2 - b^2 \varphi^2) m^2 = (b^2 \mathcal{N} + (b_\mu H^{\mu\nu} q_\nu)^2) = 2(\varphi q)^2 I_1. \quad (9)$$

Здесь $\mathcal{N} = q_\mu H^{\mu\nu} H_{\nu\rho} q^\rho$, $\tilde{\mathcal{N}} = q_\mu F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} q^\rho$, а $I_1 = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ — первый инвариант тензора $F^{\mu\nu}$.

В результате получаем

$$N^\mu = -q^\mu \frac{m(b\varphi)}{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2} + b^\mu \frac{m}{(\varphi q)} + \\ + \varphi^\mu \frac{m^3 (b\varphi)}{(\varphi q)((\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2)}. \quad (10)$$

Поскольку $a^\mu, N^\mu = \text{const}$, то

$$\tau = (Nx), \quad F(x) = (ax). \quad (11)$$

Подставляя (11) в формулу (5), нетрудно убедиться, что выражение для волновой функции принимает вид

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta=\pm 1} e^{-i(Px)} (1 - \zeta \gamma^5 \hat{S}_{ip}) (\hat{q} + m) (1 - \gamma^5 \hat{S}_0) \psi_0, \quad (12)$$

где

$$S_{ip}^\mu = \frac{q^\mu (\varphi q) / m - \varphi^\mu m}{\sqrt{(\varphi q)^2 - \varphi^2 m^2}}, \quad (13)$$

$$P^\mu = q^\mu \left(1 + \zeta \frac{(b\varphi)}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}} \right) + \\ + a^\mu - b^\mu \frac{\zeta \sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}}{(\varphi q)} - \varphi^\mu \frac{\zeta (b\varphi) m^2}{(\varphi q) \sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}}.$$

Полученные решения являются стационарными только тогда, когда $S_0^\mu = S_{ip}^\mu$. В этом случае волновые функции являются собственными функциями оператора проекции спина на направление S_{ip}^μ с собственными значениями $\zeta = \pm 1$ и оператора

^{*)} Для произвольного антисимметричного тензора $A^{\mu\nu}$, дуального ему тензора $*A^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} e^{\mu\nu\rho\lambda} A_{\rho\lambda}$ и любых 4-векторов $g^\mu, h^\mu, (gh) \neq 0$ имеет место соотношение

$$A^{\mu\nu} (gh) = -[g^\mu A^{\nu\rho} h_\rho - A^{\mu\rho} h_\rho g^\nu] + [h^\mu *A^{\nu\rho} g_\rho - *A^{\mu\rho} g_\rho h^\nu], \quad (A)$$

из которого следует, что

$$g_\mu *A_\rho^\mu *A_\nu^\rho g^\nu h^2 + (g_\mu *A_\nu^\mu h^\nu)^2 - h_\mu A_\rho^\mu A_\nu^\rho h^\nu g^2 - (g_\mu A_\nu^\mu h^\nu)^2 = \\ = g_\mu *A_\rho^\mu *A_\nu^\rho h^\nu (gh) - g_\mu A_\rho^\mu A_\nu^\rho h^\nu (gh) = 2(gh)^2 I_1. \quad (B)$$

Отсюда при выполнении условий (8) вытекают формулы (9).

канонического импульса $i\partial^\mu$ с собственными значениями P^μ . Причем ортонормированная система решений уравнения (1) может быть записана следующим образом:

$$\Psi_\zeta(x) = e^{-i(Px)} \sqrt{|J|} (\hat{q} + m) (1 - \zeta \gamma^5 \hat{S}_{tp}) \psi_0, \quad (14)$$

где J — якобиан перехода от переменных q^μ к переменным P^μ :

$$J = \det(M_{ij}) = \det \left[\frac{\partial P^i}{\partial q^j} + \frac{\partial P^i}{\partial q^0} \frac{\partial q^0}{\partial q^j} \right].$$

Используя формулы (9), матрицу M_{ij} можно представить в виде

$$M_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \zeta \frac{(b\varphi)}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}} \right) + \zeta \left(q_i - \varphi_i \frac{m^2}{(\varphi q)} \right) \times \\ \times \left(\varphi_j - q_j \frac{\varphi^0}{q^0} \right) \frac{m^2 (b\varphi)^2 + b^2 (\varphi q)^2 - m^2 b^2 \varphi^2}{(\varphi q) ((\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2)^{3/2}}.$$

Поскольку для любых векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ выполняется соотношение

$$\det(\delta_{ij} + g_i h_j) = 1 + (\mathbf{g}\mathbf{h}),$$

то

$$J = \left(1 + \zeta \frac{(b\varphi)}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}} \right)^2 \times \\ \times \left(1 + \zeta \frac{b_\mu H^{\mu\nu} q_\nu / m - 2I_1}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}} \right).$$

Структура решения (14) указывает на то, что частицы, находящиеся в конденсатах, удовлетворяющих условию (8), ведут себя как свободные, т.е. движутся с постоянной скоростью и сохраняют знак своей поляризации. Однако при их взаимодействии с другими частицами могут открываться каналы реакций, которые для свободных частиц закрыты. Этот факт следует из вида закона дисперсии, определяющего связь энергии частиц с ее каноническим импульсом.

Если ввести обозначения

$$\tilde{P}^\mu = P^\mu - a^\mu, \quad \tilde{\Phi}^\mu = b^\mu + H^{\mu\nu} \tilde{P}_\nu / m,$$

то, используя представление (13) для P^μ и соотношения

$$(\tilde{P}b) = (\varphi q) \left(1 + \zeta \frac{b_\mu H^{\mu\nu} q_\nu / m - 2I_1}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}} \right),$$

$$(\tilde{P}b)(b\varphi) = (\varphi q)(b\tilde{\Phi}), \quad \tilde{\Phi}^2 (\varphi q)^2 = \varphi^2 (\tilde{\Phi}\tilde{P})^2,$$

вытекающие из формул (A), (B) (см. сноску на с. 12), закон дисперсии можно записать в следующей форме:

$$\tilde{P}^2 = m^2 - b^2 - 2I_1 - 2\zeta \Delta \sqrt{(\tilde{P}\tilde{\Phi})^2 - \tilde{\Phi}^2 m^2}. \quad (15)$$

Здесь

$$\Delta = \text{sign} \left(1 + \zeta \frac{b_\mu H^{\mu\nu} q_\nu / m - 2I_1}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2 \varphi^2}} \right).$$

Появление фактора Δ в уравнении (15) связано с тем, что ζ задает проекцию спина частицы на направление, определяемое кинетическим импульсом частицы, а не каноническим.

В заключение отметим, что уравнение (1) имеет еще одну интерпретацию: оно описывает поведение массивного дираковского нейтрино в плотной среде в присутствии сильного электромагнитного поля [11–14]. В этом случае входящие в (1) величины имеют следующий физический смысл:

$$F^{\mu\nu} \Rightarrow \mu_0 F^{\mu\nu},$$

где μ_0 — аномальный магнитный момент частицы, а $F^{\mu\nu}$ — тензор внешнего электромагнитного поля;

$$a^\mu = b^\mu \Rightarrow f^\mu / 2,$$

где $f^\mu = \sum_f \rho_f^{(1)} j_f^\mu + \rho_f^{(2)} \lambda_f^\mu$ представляет собой линей-

ную комбинацию 4-векторов токов (j_f^μ) и поляризаций (λ_f^μ) фермионов среды; суммирование производится по всем фермионам среды, а коэффициенты $\rho_f^{(1,2)}$ определяются выбранной моделью взаимодействий. В стандартной модели эти коэффициенты, вычисленные в первом приближении, имеют вид [11–14]

$$\rho_f^{(1)} = \sqrt{2} G_F \left\{ I_{ev} + T_3^{(f)} - 2Q^{(f)} \sin^2 \theta_W \right\},$$

$$\rho_f^{(2)} = \sqrt{2} G_F \left\{ I_{ev} + T_3^{(f)} \right\},$$

где $Q^{(f)}$ — электрический заряд фермионов среды, $T_3^{(f)}$ — третья компонента слабого изоспина, $I_{ev} = \pm 1$ для взаимодействия электронного нейтрино с электронами или позитронами, $I_{ev} = 0$ в остальных случаях, G_F — константа Ферми, θ_W — угол Вайнберга.

Таким образом, массивное нейтрино в плотной среде, движущейся с постоянной скоростью и имеющей постоянную поляризацию ($f^\mu = \text{const}$) в присутствии сильного электромагнитного поля может вести себя как свободное. При этом условие (8), которое в явном виде ($\mathbf{E}, \mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно) выглядит как

$$(\mathbf{E}\mathbf{f}) = 0, \quad \mathbf{E}\mathbf{f}^0 - [\mathbf{H} \times \mathbf{f}] = 0,$$

является прямым следствием того факта, что средние скорость и поляризация частиц среды во внешнем поле должны подчиняться уравнениям Лоренца и Баргмана–Мишеля–Телегди.

Авторы благодарны А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президента РФ «Ведущие научные школы» (грант НШ-5332.2006.2).

Литература

1. *Kostelecký V.A., Potting R.* // Nucl. Phys. B. 1991. **359**. P. 545; Phys. Lett. B. 1996. **381**. P. 89.
2. *Kostelecký V.A., Samuel S.* // Phys. Rev. D. 1989. **39**. P. 683.
3. *Carroll S.M., Field G.B., Jackiw R.* // Phys. Rev. D. 1990. **41**. P. 1231.
4. *Colladay D., Kostelecký V.A.* // Phys. Rev. D. 1997. **55**. P. 6760; Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 11602.
5. *Coleman S., Glashow S.L.* // Phys. Rev. D. 1999. **59**. P. 116008.
6. *Zhukovsky V.Ch., Lobanov A.E., Murchikova E.M.* // Phys. Rev. D. 2006. **73**. P. 065016.
7. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1999. N 4. P. 1).
8. *Lobanov A.E.* // Phys. Lett. B. 2005. **619**. P. 136.
9. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
10. *Lobanov A.E.* // J. Phys. A. 2006. **39**. P. 7517.
11. *Pal P.B., Pham T.N.* // Phys. Rev. D. 1989. **40**. P. 259.
12. *Nieves J.F.* // Phys. Rev. D. 1989. **40**. P. 866.
13. *Nötzold D., Raffelt G.* // Nucl. Phys. B. 1988. **307**. P. 924.
14. *Pantaleone J.* // Phys. Lett. B. 1991. **268**. P. 227.

Поступила в редакцию
30.05.2007