УДК 536-12, 514.84, 531.5

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ, НАРУШЕНИЕ ЧЕТНОСТИ И ГРАВИТАЦИЯ В ОБОБЩЕННОЙ КВАНТОВОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

В. В. Асадов, О. В. Кечкин

(*НИИЯФ*)

E-mail: kechkin@depni.npi.msu.su

Представлены результаты изучения квантовой механики со стационарным неэрмитовым гамильтонианом и комплексным параметром эволюции, а также ее классического предела, обладающего нетривиальными корреляциями. Показано, что соответствующая динамика необратима для изотермического и адиабатического режимов квантовой и классической эволюции. Установлена возможность универсальной связи между необратимостью и динамическим нарушением четности в системе. Продемонстрирован механизм генерации гравитации распределением корреляций в свободной теории.

Введение

Второй закон термодинамики выделяет преимущественное направление в эволюции реальных физических систем. В одной из своих формулировок он утверждает, что с течением времени энтропия любой замкнутой макроскопической системы не может убывать [1]. В рамках статистической механики возникающая стрела времени объясняется переходом системы из менее вероятного в более вероятное состояние [2]. Проблема, однако, заключается в обратимости уравнений стандартной микроскопической динамики, усреднением по которой и должны получаться все необратимые макроскопические закономерности [3].

Для решения этой и ряда других задач мы предлагаем включить стрелу времени в динамику уже на микроскопическом уровне, объединив квантовую и статистическую механики в единую теоретическую конструкцию. Дополнительным аргументом в пользу этого шага может служить имеющаяся статистическая структура квантовой теории как таковой [4]. Классический предел объединенной теории должен тогда отвечать за необратимые процессы, наблюдаемые в макромире, т. е. в конечном счете и за «обычную» термодинамику.

1. Квантовая динамика со стрелой времени

Обозначим через $|\Psi\rangle$, τ и $\mathcal{H}$ вектор состояния, комплексный параметр эволюции и неэрмитов гамильтониан обобщенной квантовой системы. Уравнение Шрёдингера и условие аналитичности

$$i\hbar|\Psi\rangle_{,\tau} = \mathcal{H}|\Psi\rangle, \quad |\Psi\rangle_{,\tau^*} = 0 \tag{1}$$

(где «*» — комплексное сопряжение) постулируем в качестве основных динамических соотношений теории. Обобщенное условие стационарности зададим в виде $\mathcal{H}_{,\tau} = \mathcal{H}_{,\tau^*} = 0$ и наложим дополнительное ограничение

$$\left[\mathcal{H}, \mathcal{H}^+\right] = 0, \tag{2}$$

естественное в рамках приводимой далее физической интерпретации данной общетеоретической схемы.

Общее решение уравнений (1), (2) можно записать в виде суперпозиции $|\Psi\rangle = \sum_n C_n|\Psi_n\rangle$ базисных состояний $|\Psi_n\rangle = |\Psi_n(\tau)\rangle$, собственных для коммутирующих операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^+$, с комплексными коэффициентами $C_n = \mathrm{const}$ (здесь n — мультииндекс). Представим параметр эволюции и гамильтониан теории в терминах вещественных переменных t и β и эрмитовых операторов E и Γ следующим образом:

$$\tau = t - i\frac{\hbar}{2}\beta, \quad \mathcal{H} = E - i\frac{\hbar}{2}\Gamma. \tag{3}$$

Тогда для вероятности P_n обнаружения системы, находящейся в состоянии $|\Psi\rangle$, в базисном состоянии $|\Psi_n\rangle$, получим

$$P_n = \frac{w_n}{\mathcal{Z}}. \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{Z} = \sum_n w_n$ — статистическая сумма, связанная с данным квантовым состоянием, в которой

$$w_n = \rho_n \exp[-(E_n\beta + \Gamma_n t)], \tag{5}$$

E_n и Γ_n — собственные значения коммутирующих в силу (2) операторов E и Γ, и $\rho_n = |C_n|^2$. Ясно, что под t и E_n естественно понимать «обычные» время и уровни энергии рассматриваемой системы. Тогда β интерпретируется как обратная абсолютная температура T ($\beta = 1/kT$, где k — постоянная Больцмана), а величины Γ_n определяют «времена жизни» системы в базисных состояниях, характеризуемых вероятностями P_n (см. (4), (5)). Далее E и Γ мы называем операторами энергии и распада системы.

Последним элементом общей схемы является задание температурного режима $\beta=\beta(t)$, фиксирующего тип термодинамической эволюции. Естественные примеры даются изотермическим $\beta=\mathrm{const}$ и адиабатическим $\overline{E}=\mathrm{const}$ режимами. При этом среднее значение $\overline{E}$ энергии E определяется как $\overline{E}=\langle\Psi|E|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$. Очевидно, что $\overline{E}=\overline{E}(t,\beta)$, так что условие адиабатичности действительно определяет соответствующую температурную кривую.

Далее для полной производной по времени от величины $\overline{\Gamma}$ в изотермическом и адиабатическом режимах соответственно получаем

$$\frac{d\overline{\Gamma}}{dt}=-D_{\Gamma}^2,\quad \frac{d\overline{\Gamma}}{dt}=-D_{\Gamma}^2\left[1-\frac{(\overline{E\Gamma}-\overline{E}\,\overline{\Gamma})^2}{D_E^2D_{\Gamma}^2}\right],\tag{6}$$

где $D_{\Gamma}^2=\overline{(\Gamma-\overline{\Gamma})^2}$ и $D_E^2=\overline{(E-\overline{E})^2}$ — квадраты дисперсии операторов Γ и E в состоянии Ψ. В обоих случаях $d\overline{\Gamma}(t)/dt\leqslant 0$, причем для адиабатической эволюции это следует из неравенства Коши–Буняковского, делающего неотрицательным выражение в квадратной скобке во втором из соотношений (6).

Тем самым в указанных режимах эволюции $\overline{\Gamma}(t)$ не возрастает при любых начальных условиях. Это означает наличие в изучаемой динамике хорошо определенной стрелы времени, направленной на аттрактор с минимальным значением оператора Γ (согласующийся с данным режимом и начальными условиями). При этом понятие температуры с необходимостью обобщается здесь на неравновесные состояния системы.

2. Динамическое нарушение четности

Наиболее интересным является выбор оператора распада пропорциональным оператору четности системы. В простейшем двухкомпонентном случае $\Gamma=\gamma\sigma_3$, где σ_3 — соответствующая матрица Паули, а γ — положительная (для определенности) постоянная. Вектор состояния $|\Psi\rangle$ имеет здесь вид $|\Psi\rangle=|\Psi_+\rangle+|\Psi_-\rangle$, где $|\Psi_\pm\rangle$ — собственные векторы оператора Γ с собственными значениями $\pm\gamma$. Их интерпретация может быть связана с левыми и правыми состояниями, с частицами и античастицами и, вообще, с любыми другими реализациями данной дискретной группы симметрий.

Анализ соответствующей динамики позволяет установить, что на временных асимптотиках система с необходимостью является поляризованной. Действительно, имеет место следующее утверждение:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\overline{\Gamma}(t)=\mp\gamma,\tag{7}$$

т. е. система совершает переход из «$+$»-состояния в «$-$»-состояние независимо от того, каким является распределение соответствующих вероятностей в начальный момент времени $t=0$. Единственное ограничение на температурный режим, которое делается при выводе формулы (7), состоит в требовании существования асимптотических значений обратной температуры, т. е. величин $\beta_\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\beta(t)$. Любопытно отметить, что в частном случае равновероятного распределения «четных» $|\Psi_{+\,n}\rangle$ и «нечетных» $|\Psi_{-\,n}\rangle$ состояний с одинаковыми значениями энергии E_n в начальный момент времени (т. е. при $P_{+\,n}(0)=P_{-\,n}(0)$) функция $\overline{\Gamma}(t)$ имеет вид кинка

$$\overline{\Gamma}=-\gamma\,\mathrm{th}\,\gamma t.$$

Представленная схема динамического нарушения четности может быть использована для объяснения факта асимметрии между правым и левым в нейтринной физике, а также барионной асимметрии во Вселенной.

3. Классическая динамика со стрелой времени

Определим классическую динамику как предел квантовой при $\hbar\to 0$. Представляя фазу S волновой функции $\Psi=\exp(iS/\hbar)$ в виде

$$S=S_1+\frac{i\hbar}{2}S_2,\tag{8}$$

для следующей из (1) модифицированной системы классических уравнений Гамильтона–Якоби получим

$$\begin{aligned} &S_{1,t}=-E, && S_{1,\beta}=0,\\ &S_{e,t}+E_{,p^T}S_{e,q}=\Gamma_*, && S_{e,\beta}=0.\end{aligned}\tag{9}$$

В ней $S_e=S_2-\beta E$ — величина энтропийного типа, $\Gamma_*=\Gamma+\mathrm{tr}(E_{,pp^T}S_{1,qq^T})$, а q и p — столбцы канонических координат и импульсов. Предполагается, что $E=T(p)+V(q)$; после выполнения дифференцирований во всех динамических переменных должна быть сделана подстановка $p\to S_{1,q}$.

Утверждение состоит в том, что в силу (9) классическая величина $\overline{\Gamma}=\int dq\,\rho\Gamma$ (где $\rho=\exp(-S_2)/\mathcal{Z}$ — плотность вероятности, $\mathcal{Z}=\int dq\exp(-S_2)$) удовлетворяет тем же соотношениям (6), что и ее квантовый аналог. Таким образом, классическая динамика также является необратимой в изотермическом и адиабатическом режимах эволюции. Результат имеет место в естественном (см. (2)) предположении о равенстве нулю классической скобки Пуассона $\{E,\Gamma\}$ и при условии достаточно быстрого убывания плотности вероятности на координатной бесконечности (подразумеваемом для локализованного классического объекта).

Мы отождествляем максимум плотности вероятности с классическим положением рассматриваемого объекта. Модифицированные уравнения Гамильтона, полученные при учете системы (9), имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &q_{,t}=E_{,p}-A_2^{-1}\Gamma_{*;q}, && q_{,\beta}=-A_2^{-1}E_{;q},\\ &p_{,t}=-E_{,q}-A_1A_2^{-1}\Gamma_{*;q}, && p_{,\beta}=-A_1A_2^{-1}E_{;q}.\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь «$;q$» — полная производная по столбцу q, матричные же величины определяются как $A_1 = S_{1,qq^T}$ и $A_2 = S_{2,qq^T}$. Система уравнений (10) и температурный режим $\beta = \beta(t)$ определяют полные производные классических координат и импульсов по времени (как $d/dt = \partial_t + \dot\beta\,\partial_\beta$, где $\dot\beta = d\beta/dt$).

Отметим, что уравнения (10) переходят в стандартные уравнения Гамильтона при $A_2^{-1} \to 0$. Этот предел соответствует абсолютной локализации объекта на его классической траектории $q = q(t)$. Действительно, раскладывая $S_2(q)$ в ряд с центром в $q(t)$, учитывая необходимое условие экстремума $dS_2(q(t)) = 0$ и тот факт, что $d^2S_2(q(t)) = dq^T A_2\,dq$, для плотности вероятности в данном пределе получаем $\rho = \delta(q - q(t))$.

Определяя далее корреляцию $A \circ B$ величин A и B как $\overline{AB + BA} - 2\overline{A}\,\overline{B}$, получаем

$$q_k \circ q_l \approx (A_2^{-1})_{kl}, \quad p_k \circ q_l \approx (A_1 A_2^{-1})_{kl},$$
$$p_k \circ p_l \approx (A_1 A_2^{-1} A_1)_{kl},$$

причем эти равенства становятся точными в пределе $A_2^{-1} \to 0$. Тем самым модификация уравнений Гамильтона оказывается связанной с включением в них нетривиальных корреляций канонических координат и импульсов, т. е. с нелокальной в вероятностном смысле структурой фазового пространства данного варианта классической теории.

4. Релятивизм и эффективная гравитация

Простейшая четырехмерная релятивистская квантовая теория получается при выборе $E = g_{(0)}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu / 2m$, где $g_{(0)\mu\nu}$ — метрика Минковского с сигнатурой $+---$, $p_\mu = i\hbar\,\partial_\mu$ — оператор импульса, и m — параметр размерности массы. В этой теории t и x^0 — кинематически независимые «термодинамическое» и «геометрическое» времена. В случае $\Gamma = 0$ классические уравнения Гамильтона имеют здесь следующий вид:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{m}\Big\{ g_{(0)}^{\mu\nu} p_\nu - g_{(0)}^{\nu\lambda}\Big[\big(A_2^{-1}\big)^{\mu\sigma} S_{1,\sigma\nu\lambda} + \dot\beta\big(A_2^{-1}A_1\big)^{\mu}_{\ \nu} p_\lambda\Big]\Big\},$$
$$\frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{1}{m} g_{(0)}^{\nu\lambda}\Big[\big(A_1 A_2^{-1}\big)^{\sigma}_{\ \mu} S_{1,\sigma\nu\lambda} + \dot\beta\big(A_1 A_2^{-1} A_1\big)_{\mu\nu} p_\lambda\Big]. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что при отсутствии корреляций мировые линии становятся прямыми, причем получающееся соотношение $p_\mu = g_{(0)\mu\nu} m\,dx^\nu/dt$ позволяет отождествить термодинамическое время t с собственным временем движущейся частицы с массой m.

Сравним далее систему (11) с уравнениями геодезической для аналогичной частицы, движущейся в гравитационном поле с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{m} g^{\mu\nu} p_\nu, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{1}{2m} g_\mu^{\nu\lambda} p_\nu p_\lambda. \tag{12}$$

Рассматривая случай малых корреляций (т. е. хорошо определенной локализации частицы) и слабой гравитации ($g_{\mu\nu} = g_{(0)\mu\nu} + g_{(1)\mu\nu}$, где $g_{(1)\mu\nu} \to 0$), удается выразить возмущения метрики в (12) через корреляционные коэффициенты из (11). Определяется также класс температурных режимов, совместный с получающейся эффективной римановой геометрией. Так, в начальной системе покоя частицы гравитационный потенциал $g_{(1)00}$ дается следующим выражением:

$$g_{(1)\,00} = \big(A_2^{-1}\big)^{0\mu}\left[\frac{1}{mc} g_{(0)}^{\nu\lambda} S_{1,\mu\nu\lambda} + \dot\beta (A_1)_{\mu 0}\right],$$

где c — скорость света. Тем самым неопределенность в положении и импульсе, характеризуемая их нетривиальными корреляциями, воспринимается наблюдателем как гравитационное поле, действующее на рассматриваемую частицу.

Гравитационные аспекты квантовой динамики с классическим пределом изучались также в [5], а римановы структуры в равновесной термодинамике — в работе [6].

Заключение

На наш взгляд, даваемое соотношениями (3) и (8) объединение времени и температуры, спектров энергии и времен жизни, а также действия и энтропии в единые комплексно-аналитические сущности имеет фундаментальный смысл. Стрела времени, динамическое нарушение четности и гравитация — эффекты, обеспечиваемые данной общетеоретической конструкцией. Отметим, что они исчезают при тривиальных корреляциях, т. е. для локализованных состояний теории.

Мы благодарны Б. С. Ишханову за постоянный обмен идеями и поддержку и Ю. П. Рыбакову, А. А. Славнову, А. В. Борисову, А. С. Холево, Ю. Г. Рудому, С. С. Кокареву, В. Д. Кассандрову, Дж. Коста, М. Матоне, А. Эррера-Агиляр, Т. Занниас, Э. Кеведо и О. Обрегону — за полезные обсуждения представленных результатов.

Литература

1. *Кубо Р.* Термодинамика. М., 1970.
2. *Гиббс Дж.В.* Основные принципы статистической механики. М.; Л., 1946.
3. *Magnon A.* Arrow of time and reality: in search of a conciliation. Singapore, 1997.
4. *Холево А.С.* Статистическая структура квантовой теории. М., 2003.
5. *Matone M.* // Found. Phys. Lett. 2002. **15**. P. 311.
6. *Quevedo H.* // J. Math. Phys. 2007. **48**. P. 013506.

Поступила в редакцию
21.06.2007