

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.19

**О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ СПИНА 1/2 ВО ВНЕШНЕМ  
ПОЛЕ****В. И. Иноземцев\***, Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: sadovnikov@phys.msu.ru

Показано, что гиперболические системы частиц Сазерленда со спином 1/2, находящиеся во внешнем поле с потенциалом Морса, характеризуемом параметром  $\tau^2$ , имеют дискретную часть спектра при определенном ограничении, накладываемом на  $\tau$ , параметр двухчастичного взаимодействия  $\lambda$  и число частиц. Основное состояние описывается волновой функцией в форме Джастрова. Известные результаты для систем с взаимодействием, обратным квадрату расстояния между частицами, воспроизводятся в пределе  $\tau \rightarrow \infty$ .

Нахождение точных волновых функций основного состояния квантовых систем многих взаимодействующих частиц в одном измерении и возбуждений над ним является одной из актуальных задач математической физики. Наиболее исследованными к настоящему времени системами, для которых известен весь дискретный спектр, являются системы Калоджеро–Сазерленда (КС) [1, 2] с дальнедействием, описываемым парным потенциалом  $V(x) = \lambda(\lambda+1)x^{-2}$ , и находящиеся в поле с потенциалом гармонического осциллятора  $W(x) = \omega^2 x^2/2$ . Простой вид этого спектра позволяет исследовать термодинамику моделей в пределе бесконечного числа частиц [3, 4]. Менее известны результаты для систем с короткодействующим потенциалом бинарного взаимодействия  $[a^{-1} \text{sh}(ax)]^{-2}$ , аналогичным оригинальному тригонометрическому потенциалу, предложенному Сазерлендом [3], находящихся во внешнем поле с потенциалом Морса [5]. Гамильтониан этих систем (далее обозначаемых СМ) имеет вид

$$H = \sum_j^N \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + W(x_j) \right] + \sum_{j < k}^N \frac{\lambda(\lambda+1)a^2}{\text{sh}^2 a(x_j - x_k)}, \quad (1)$$

где

$$W(x) = 2\tau^2 a^2 (\exp(2ax) - 1)^2. \quad (2)$$

Динамика систем, описываемых (1), (2), намного более сложна по сравнению с системами КС в поле с потенциалом гармонического осциллятора. Последние могут быть рассмотрены как предел СМ-моделей, когда параметр потенциала Морса  $\tau$

неограниченно возрастает как  $\omega/4a^2$  при  $a \rightarrow 0$ . В частности, в работе [5] было показано, что в случае статистики Бозе дискретная часть спектра для СМ-систем существует лишь при выполнении условия на параметры  $\tau$  и  $\lambda$ ,  $\tau - 1/2 - (\lambda + 1)(N - 1) > 0$ , и содержит конечное число уровней.

В работах Ха и Холдейна [6] и Поликронакоса [7] было предложено обобщение модели КС для частиц с внутренними степенями свободы ( $su(n)$ -спинами) и обменным спиновым взаимодействием вида  $\lambda(\lambda + P_{jk})V(x_j - x_k)$ , где оператор  $P_{jk}$  переставляет спины частиц с номерами  $j$  и  $k$ ,

$$P_{jk} = \sum_{p,q=1}^n e_j^{pq} e_k^{qp}, \quad (3)$$

$\{e_j^{pq}\}$  — элементарные спиновые операторы, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[e_j^{pq}, e_k^{rs}] = \delta_{jk} (\delta^{rq} e_j^{ps} - \delta^{ps} e_j^{rq}). \quad (4)$$

Важные физические приложения систем фермионов с  $su(2)$ -спинами и дальнедействующим КС-взаимодействием были найдены и подробно исследованы в [8]. Для более сложных систем типа СМ спектральная задача рассматривалась только для предельного случая неоднородных спиновых цепочек [9].

В свете результатов работ [6–9] возникает естественный вопрос: можно ли найти в явной форме волновые функции спиновых СМ-систем, описываемых гамильтонианом

$$H_{SM}^{(s)} = \sum_j^N \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + 2\tau^2 a^2 (\exp(2ax_j) - 1)^2 \right] +$$

\*) Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, 141980, г. Дубна Московской обл.

$$+ \sum_{j < k}^N \frac{\lambda(\lambda + P_{jk})a^2}{\text{sh}^2 a(x_j - x_k)}? \quad (5)$$

В предыдущей статье [10] нами было показано, что для таких систем существует множество интегралов движения-операторов, коммутирующих с  $H_{SM}^{(s)}$ . Цель настоящей работы — построение определенного класса собственных функций оператора (5) для физически интересного случая спинов  $1/2$  ( $n = 2$ ), который наиболее важен в связи с возможностью практического применения результатов к описанию процессов в конфаймированном квазиодномерном электронном газе [8]. Для того чтобы найти энергию основного состояния систем, описываемых гамильтонианом (5), естественно использовать пробную волновую функцию в форме Джастрова, как это было сделано в [6, 8],

$$\Psi(z_1\sigma_1, \dots, z_N\sigma_N) = C^{-1/2} \times \prod_{1 \leq j < k \leq N} |z_j - z_k|^\lambda (z_j - z_k)^{\delta_{\sigma_j\sigma_k}} \exp \frac{i\pi}{2} \text{sgn}(\sigma_j - \sigma_k) \times \prod_{l=1}^N z_l^{\rho + \varepsilon\sigma_l} \exp(-\tau z_l). \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_j = 2s_j^{(3)}$ ,  $s_j^{(3)} = \pm 1/2$  — значения проекции спина  $j$ -й частицы. Собственные состояния допускают классификацию по значениям проекции полного спина  $S_3 = 1/2(N_+ - N_-)$ , где  $N_\pm$  — числа частиц с  $\sigma = \pm 1$ ,  $N_+ + N_- = N$ . Значения параметров  $\rho$  и  $\varepsilon$  должны быть найдены из соответствующего уравнения Шрёдингера.

При действии оператора (5) на  $\Psi$  возникает множество членов, которые могут быть записаны в форме

$$\mathcal{H}_{SM}^{(s)} \Psi = [A_1 + \tau A_2(z, \sigma) + \lambda A_3(z, \sigma)] \Psi,$$

где

$$A_1 = -\frac{1}{2} \left[ \lambda N(N-1) \left( \frac{\lambda}{6}(2N-1) + \rho \right) + (N_+^2 + N_-^2) \left( \rho + \lambda + \frac{N}{2} \right) \right] + \frac{N}{2} \left( \tau^2 - \rho^2 - \varepsilon^2 + \rho + \lambda + \frac{N^2 - 1}{6} \right) - \varepsilon(N_+ - N_-) \left( \rho + \frac{N-1}{2} \right), \quad (7)$$

$$A_2(z, \sigma) = \left[ \rho - \tau + (N-1) \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \right] \sum_{k=1}^N z_k + \left( \varepsilon + \frac{N_+ - N_-}{2} \right) \sum_{k=1}^N \sigma_k z_k, \quad (8)$$

$$A_3(z, \sigma) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \neq l}^N \frac{\sigma_k z_k - \sigma_l z_l}{z_l - z_k} - \sum_{k \neq l \neq m}^N \frac{z_k^2 \delta_{\sigma_k \sigma_l}}{(z_k - z_l)(z_k - z_m)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N \frac{z_k z_l}{(z_k - z_l)^2} (1 - \delta_{\sigma_k \sigma_l}) \times \left[ 1 - \left( \frac{z_l}{z_k} \right)^{\varepsilon(\sigma_k - \sigma_l)} \prod_{j \neq k, l}^N \left( \frac{z_j - z_l}{z_j - z_k} \right)^{\delta_{\sigma_j \sigma_k} - \delta_{\sigma_j \sigma_l}} \right]. \quad (9)$$

Последнее слагаемое в правой части (9) соответствует вкладу спиново-обменной части гамильтониана (5).

Можно показать, что слагаемые, линейные по  $\{z\}$ , которые присутствуют в  $A_2(z, \sigma)$ , исчезают, если параметры  $\rho$  и  $\varepsilon$  удовлетворяют условиям

$$\rho = \tau - (\lambda + 1/2)(N - 1), \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(N_- - N_+). \quad (11)$$

Явная зависимость от спиновых переменных в формуле (9) для  $A_3(z, \sigma)$  может быть устранена, если рассматривать отдельно координаты частиц с  $\sigma = \pm 1$  и обозначить  $\{z_j\}_{\sigma=1} = \{p_\nu\}$ ,  $\nu = 1, \dots, N_+$ ,  $\{z_j\}_{\sigma=-1} = \{q_\mu\}$ ,  $\mu = 1, \dots, N_-$ ,

$$A_3(z, \sigma) = \frac{N-1}{4}(N_+ - N_-)^2 - \frac{1}{3} [N_+(N_+ - 1)(N_+ - 2) + N_-(N_- - 1)(N_- - 2)] + \sum_{\nu=1}^{N_+} \sum_{\mu=1}^{N_-} \left\{ \frac{(N_+ - N_-)(p_\nu + q_\mu)}{2(p_\nu - q_\mu)} - \sum_{l \neq \nu}^{N_+} \frac{p_\nu^2}{(p_\nu - p_l)(p_\nu - q_\mu)} - \sum_{m \neq \mu}^{N_-} \frac{q_\mu^2}{(q_\mu - q_m)(q_\mu - p_\nu)} \right\} + \sum_{\nu=1}^{N_+} \sum_{\mu=1}^{N_-} \frac{p_\nu q_\mu}{(p_\nu - q_\mu)^2} \times \left[ 1 - \left( \frac{p_\nu}{q_\mu} \right)^{N_+ - N_-} \prod_{l \neq \nu}^{N_+} \frac{p_l - q_\mu}{p_l - p_\nu} \prod_{m \neq \mu}^{N_-} \frac{q_m - p_\nu}{q_m - q_\mu} \right]. \quad (12)$$

Это выражение выглядит чрезвычайно громоздким. Однако оно может быть значительно упрощено с помощью следующего приема. Рассмотрим интеграл

$$I_{N_+, N_-} = \iint_{\mathcal{C}'} \frac{dz dz'}{(z - z')^4} z^{N_+ - N_- + 1} z'^{N_- - N_+ + 1} \times \prod_{\nu=1}^{N_+} \frac{z' - p_\nu}{z - p_\nu} \prod_{\mu=1}^{N_-} \frac{z - q_\mu}{z' - q_\mu}. \quad (13)$$

Выберем контуры  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}'$ , окружающие  $\{p_\nu\}$ ,  $\{q_\mu\}$  следующим образом: пусть  $\mathcal{C}'$  лежит внутри  $\mathcal{C}$  при  $N_+ - N_- \geq 0$ ,  $\mathcal{C}$  лежит внутри  $\mathcal{C}'$  при  $N_- - N_+ \geq 0$

и внешний контур не обходит 0 в обоих случаях. Как легко видеть, при расширении внешнего контура до бесконечности

$$I_{N_+, N_-} = 0. \quad (14)$$

С другой стороны, оценка  $I_{N_+, N_-}$  может быть произведена посредством последовательного вычисления вычетов при полюсах подинтегрального выражения (13). Эта процедура позволяет вычислить двойные и тройные суммы в (12). Можно показать посредством простых вычислений, что (14) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{N_+} \sum_{\mu=1}^{N_-} \frac{p_\nu q_\mu}{(p_\nu - q_\mu)^2} \times \\ & \times \left[ 1 - \left( \frac{p_\nu}{q_\mu} \right)^{N_+ - N_-} \prod_{l \neq \nu}^{N_+} \frac{p_l - q_\mu}{p_l - p_\nu} \prod_{m \neq \mu}^{N_-} \frac{q_m - p_\nu}{q_m - q_\mu} \right] = \\ & = \sum_{\nu=1}^{N_+} \sum_{\mu=1}^{N_-} (p_\nu - q_\mu)^{-1} \times \\ & \times \left[ \frac{(N_- - N_+)(p_\nu + q_\mu)}{2} + \sum_{l \neq \nu}^{N_+} \frac{p_\nu^2}{p_\nu - p_l} - \sum_{m \neq \mu}^{N_-} \frac{q_\mu^2}{q_\mu - q_m} \right] - \\ & - \Phi(N) + \Phi(\Delta), \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{x}{24}(2x^2 - 3x - 2), \quad \Delta = |N_+ - N_-|.$$

Сравнивая (15) с правой частью (12), легко показать, что  $A_3(z, \sigma)$  не зависит от  $\{z\}$  и спиновые переменные входят в это выражение только в виде проекции полного спина. Таким образом, волновые функции в форме Джастрова (6) действительно являются собственными функциями гамильтониана (5) при условии, что  $\rho$  и  $\varepsilon$  определяются формулами (10), (11). Соответствующие собственные значения могут быть получены из (7), (15):

$$\begin{aligned} E_\Delta = a^2 \left\{ -\frac{N}{6} [2\lambda^2(N-1)(2N-1) + \right. \\ \left. + \lambda(4N^2 - 3N - 4) + N^2 - 1] + \tau N [2\lambda(N-1) + N] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{3} \Delta(\Delta^2 - 1) + \Delta^2 \left[ \tau - N \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda}{2} \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Минимум выражения (16) достигается при  $\Delta = 0$  для четных  $N$  и  $\Delta = 1$  для нечетных  $N$ . В обоих случаях проекция полного спина имеет минимальное из возможных значений, т. е. упорядочение спинов осуществляется по антиферромагнитному типу. Функции (6) не имеют нулей, кроме тех, что локализованы на гиперплоскостях  $z_j - z_k = 0$ . Таким образом, можно использовать обычную аргументацию [4] для подтверждения гипотезы об основном состоянии: оно существует, если пара-

метр потенциала Морса удовлетворяет неравенству  $\tau - (\lambda + 1/2)(N - 1) - \Delta/2 > 0$  и описывается формулами (6), (16) при минимальном из возможных значений  $\Delta$ . В пределе  $a \rightarrow 0$  в (16) при переопределении  $\tau = \omega/4a^2$  можно получить известные формулы для спектра систем  $s = 1/2$  фермионов с дальнедействием, находящихся в поле с потенциалом гармонического осциллятора [8]. Нормировочный множитель для волновой функции основного состояния для четных  $N = 2M$  определяется по формуле

$$C_M(\lambda, \tau) = \frac{(2M)!}{(M!)^2} (2a)^{-2M} \tau^{-2M(2\tau - \lambda(2M-1) + M)} I_M(\lambda, \rho),$$

где

$$\begin{aligned} I_M(\lambda, \rho) = & \left( \prod_{l=1}^{2M} \int_0^\infty dz_l z_l^{2\rho-1} \exp(-z_l) \right) \prod_{j < k}^{2M} |z_j - z_k|^{2\lambda} \times \\ & \times \prod_{j' < k'}^M (z_{j'} - z_{k'})^2 (z_{j'+M} - z_{k'+M})^2. \quad (17) \end{aligned}$$

Последний множитель в подинтегральном выражении в (17) возникает благодаря спиновым степеням свободы и нарушает его симметрию относительно перестановок всего набора пространственных переменных  $2M$ . Как следствие явное вычисление  $I_M(\lambda, \rho)$  представляет значительно более сложную задачу, чем оценка той же величины для систем бесспиновых бозонов [5]. Нам не удалось найти аналитическое выражение для  $I_M(\lambda, \rho)$  при произвольных  $M$ . Исключение составляет случай  $M = 2$ , для которого удается найти связь нормировочного интеграла с корреляционными интегралами Сельберга [11, 12]. В этом случае громоздкие, но по сути простые вычисления приводят к формуле

$$\begin{aligned} I_2(\lambda, \rho) = & \frac{2(1+3\lambda)(1+4\lambda)}{\rho(2\rho+\lambda)} \times \\ & \times \prod_{j=1}^4 \frac{\Gamma(1+j\lambda)}{\Gamma(1+\lambda)} \Gamma(2\rho+1+\lambda(j-1)). \end{aligned}$$

Итак, нами продемонстрировано, что для СМ-систем фермионов со спином  $s = 1/2$  можно найти энергию основного состояния и часть дискретного спектра, характеризуемую «спиновыми» возбуждениями, при использовании волновых функций типа Джастрова. Разумеется, должны существовать также возбужденные состояния «пространственного» типа, подобные найденным в [8] для КС-систем бесспиновых бозонов. Пока неясно, как следует модифицировать анзац (6) для построения соответствующих волновых функций. Элегантный способ введения «пространственных» возбуждений для КС-систем [13], состоящий в умножении волновой функции основного состояния на симметричные комбинации полиномов Эрмита, по-видимому, не подходит для СМ-моделей из-за более слож-

ных рекуррентных соотношений между полиномами Лагерра, которые описывают элементарные возбуждения для осциллятора Морса при отсутствии взаимодействия между частицами. Использование более общего подхода, предложенного Като и Курamoto [14] для изучения тригонометрических систем Сазерленда с внутренними степенями свободы, может оказаться более перспективным. Описание состояний непрерывного спектра, однако, не может быть проведено в рамках известных схем и по-прежнему остается нерешенной проблемой.

#### Литература

1. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1969. **10**. P. 2191; 1971. **12**. P. 419.
2. *Sutherland B.* // J. Math. Phys. 1971. **12**. P. 247.
3. *Sutherland B.* // Phys. Rev. 1972. **A5**. P. 1372.
4. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Rep. 1983. **94**. P. 313.
5. *Inozemtsev V.I.* // Physica Scripta 1984. **29**. P. 518.
6. *Ha Z.N.C., Haldane F.D.M.* // Phys. Rev. 1992. **B46**. P. 9359.
7. *Polychronakos A.P.* // Phys. Rev. Lett. 1992. **69**. P. 703.
8. *Vacek K., Okiji A., Kawakami N.* // Phys. Rev. 1994. **B49**. P. 4635.
9. *Frahm H., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. **27**. P. 801.
10. *Иноземцев В.И., Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 3.
11. *Selberg A.* // Norsk. Mat. Tidsskr. 1944. **26**. P. 71.
12. *Kaneko J.* // SIAM J. Math. Anal. 1993. **24**. P. 1086.
13. *Vacek K., Okiji A., Kawakami N.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. **27**. P. 201.
14. *Kato Y., Kuramoto Y.* // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**. P. 1222.

Поступила в редакцию  
18.04.2007