

УДК 530.145

УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

А. А. Солошенко^{*}), К. В. Степаньянц

(кафедра теоретической физики)

E-mail: stepan@phys.msu.su

Для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса построены уравнения Швингера–Дайсона.

Введение

Исследование структуры квантовых поправок в суперсимметричных моделях квантовой теории поля является интересной и весьма нетривиальной задачей. Несмотря на то что многие вопросы уже давно детально исследованы [1], до сих пор остается ряд проблем, которые так и не нашли своего решения. К ним относится, например, строгий вывод точной во всех порядках β -функции. Ее вид был угадан в работе [2] на основе исследования структуры инстантонных вкладов.

Многочисленные петлевые вычисления (например, [3–5]), которые, как правило, проводились с использованием размерной редукции и схемы минимальных вычитаний, показали, что точная β -функция может быть получена, если специальным образом подобрать схему вычитаний. Проводились также двухпетлевые вычисления с помощью дифференциальной перенормировки [6]. При использовании регуляризации высшими ковариантными производными [7–9] оказалось возможным достаточно легко получить схемно независимую функцию Гелл-Манна–Лоу. (Вычисления были проведены вплоть до трехпетлевого приближения [10–12].) При этом была установлена интересная закономерность: все интегралы, которые определяют эту функцию, являются интегралами от полных производных. Впервые такая закономерность была замечена в работе [12]. Впоследствии в абелевом случае ее частично удалось объяснить, используя метод, основанный на подстановке решений тождеств Уорда в уравнения Швингера–Дайсона [13, 14]. При этом точная β -функция получается, если предположить справедливость некоторого нового тождества для функций Грина, которое не следует из калибровочной инвариантности или суперсимметрии. Это тождество является нетривиальным в трех и более петлях. Ряд проверок [15, 16] показал его справедливость как в абелевом, так и в неабелевом случае. Кроме того, вычисления в неабелевых калибровочных теориях [17] показа-

ли, что даже в чистой теории Янга–Миллса при использовании регуляризации высшими ковариантными производными все интегралы, определяющие функцию Гелл-Манна–Лоу, являются интегралами от полных производных. Тем не менее остается вопрос о том, как можно вычислять вклад калибровочного суперполя и духов точно во всех порядках теории возмущений? По аналогии со вкладом суперполей материи было бы разумно предположить, что это можно сделать с помощью уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Славнова–Тейлора. При этом первым шагом должно стать построение уравнений Швингера–Дайсона для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Этой цели посвящена настоящая работа.

1. $N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса и ее квантование с помощью метода фонового поля

$N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса в суперпространстве описывается следующим действием:

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b, \quad (1)$$

где C — матрица зарядового сопряжения, суперполе

$$W_a = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_a e^{2V})$$

представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля, V — вещественное скалярное суперполе, а D — суперсимметричная ковариантная производная. В наших обозначениях калибровочное суперполе V раскладывается по генераторам калибровочной группы T^A как $V = e V^A T^A$, где e — константа связи.

Действие (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda},$$

где Λ — произвольное киральное суперполе.

^{*}) Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова. 141980, г. Дубна Московской обл., Россия.

Для квантования этой модели удобно использовать метод фонового поля. Это связано с тем, что метод фонового поля позволяет проводить вычисления эффективного действия, явно не нарушая фоновую калибровочную инвариантность. В применении к суперсимметричному случаю он может быть сформулирован следующим образом [1, 18]: осуществим в действии (1) замену

$$e^{2V} \rightarrow e^{2V'} \equiv e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega}, \quad (2)$$

где Ω — фоновое скалярное суперполе. Получившаяся теория будет инвариантна относительно фоновых калибровочных преобразований

$$V \rightarrow e^{iK} V e^{-iK}; \quad e^{\Omega} \rightarrow e^{iK} e^{\Omega} e^{-i\Lambda}; \quad e^{\Omega^+} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{\Omega^+} e^{-iK}, \quad (3)$$

где K — произвольное вещественное суперполе, а Λ — произвольное киральное суперполе.

Построим киральные ковариантные производные

$$\mathbf{D} \equiv e^{-\Omega^+} D e^{\Omega^+}; \quad \bar{\mathbf{D}} \equiv e^{\Omega} \bar{D} e^{-\Omega}.$$

При действии на некоторое поле X , которое преобразуется по закону $X \rightarrow e^{iK} X$, эти ковариантные производные будут меняться точно так же. Тогда несложно убедиться, что после замены (2) действие (1) перейдет в

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a - \frac{1}{64e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta \left[16(e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \mathbf{W}_a + (e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \bar{\mathbf{D}}^2 (e^{-2V} \mathbf{D}_a e^{2V}) \right], \quad (4)$$

где

$$\mathbf{W}_a = \frac{1}{8} e^{\Omega} \bar{\mathbf{D}}^2 (e^{-\Omega} e^{-\Omega^+} D_a e^{\Omega^+} e^{\Omega}) e^{-\Omega}.$$

При этом ковариантные производные поля V , лежащего в присоединенном представлении, определяются стандартным образом.

Мы будем фиксировать калибровку добавлением слагаемых

$$S_{gf} = -\frac{1}{32e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta \left(V \mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{D}}^2 V + V \bar{\mathbf{D}}^2 \mathbf{D}^2 V \right). \quad (5)$$

Соответствующее действие духов Фаддеева-Попова будет

$$S_{gh} = i \int d^4x d^4\theta (\bar{c} + c^+) V_{Ad} [(c + c^+) + \text{cth } V_{Ad} (c - c^+)], \quad (6)$$

где индекс Ad означает, что суперполе V раскладывается по генераторам присоединенного представления калибровочной группы, а поля c и \bar{c} являются фоновыми киральными полями. (Мы не раскладываем их по генераторам, а рассматриваем как столбцы, которые нумеруются индексом, соответствующим калибровочной группе.) Кроме того,

процедура квантования также требует добавления действия для духов Нильсена-Каллош:

$$S_b = \frac{1}{4e^2} \int d^4x d^4\theta b_0^+ e^{\Omega_{Ad}^+} e^{\Omega_{Ad}} b_0, \quad (7)$$

где b_0 — антикоммутирующее киральное суперполе в присоединенном представлении калибровочной группы [1].

Построим производящий функционал следующим образом:

$$Z[J, \Omega] = \int D\mu \times \exp \left\{ i\mathbf{S} + i \int d^4x d^4\theta J(V'[V, \Omega] - \mathbf{V}) + i \text{Sources} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{S} \equiv S + S_{gf} + S_{gh} + S_b;$$

$e^{2V} \equiv e^{\Omega^+} e^{\Omega}$, а через Sources обозначены дополнительные источники, которые по тем или иным соображениям желательно ввести. С помощью функционала $Z[J, \Omega]$ можно построить производящий функционал для связанных функций Грина и эффективного действия. Вычисляя слагасмы, которые соответствуют двухточечной функции Грина фонового поля, можно получить выражение для функции Гелл-Манна-Лоу.

Заметим, что при построении производящего функционала мы пока не вводили регуляризацию. Поэтому приводимые далее рассуждения имеют достаточно формальный характер. Для того чтобы вычислять точную функцию Гелл-Манна-Лоу с помощью метода, предложенного в работе [13], необходимо использовать регуляризацию высшими производными, которая позволяет осуществлять дифференцирование по параметру регуляризации Λ . Детально такая регуляризация описана в работе [17]. Ее влияние на дальнейшие результаты мы пока не исследуем.

2. Уравнения Швингера-Дайсона

Несложно убедиться [14], что уравнения Швингера-Дайсона в методе фонового поля записываются в виде

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x} = \left\langle \frac{\delta}{\delta \mathbf{V}_x} S[\mathbf{V}, V, \phi] \right\rangle, \quad (9)$$

где угловые скобки означают обычное функциональное усреднение, а в окончательном результате необходимо положить поле V (аргумент эффективного действия) равным 0. Явное выполнение дифференцирования по полю \mathbf{V} приводит к сложным и громоздким выражениям. Однако мы хотим только построить метод вычисления величины

$$\left. \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^B \delta \mathbf{V}_x^A} \right|_{p=0}, \quad (10)$$

поэтому в уравнении (9) можно оставить только те слагаемые, которые дадут в нее вклад. В частности,

поскольку функция Грина (10) очевидно пропорциональна δ^{AB} , то можно отбросить все слагаемые, в которые входят

$$[\hat{P}\mathbf{V}, \hat{Q}\mathbf{V}], \quad (11)$$

где \hat{P} и \hat{Q} — некоторые операторы, которые не содержат квантовое поле V . Поэтому ковариантные производные и фоновую напряженность калибровочного поля можно заменить следующими выражениями:

$$\begin{aligned} D_a &\rightarrow D_a + [D_a \mathbf{V},]; & \bar{D}_a &\rightarrow \bar{D}_a - [\bar{D}_a \mathbf{V},]; \\ W_a &\rightarrow \frac{1}{4} \bar{D}^2 D_a \mathbf{V}. \end{aligned}$$

После этого уже можно провести дифференцирование в формуле (9). При этом необходимо помнить, что зависимость действия духов от фонового поля связана с тем, что духи (а также антидухи и духи Нильсена–Каллош) являются фоново киральными полями и могут быть представлены в виде

$$c = e^{\Omega_{Ad} c_0}; \quad c^+ = e^{-\Omega_{Ad}^+ c_0^+},$$

где поля c_0 и c_0^+ уже являются обычными киральными или антикиральными полями. Пренебрегая слагаемыми вида (11), после несложных преобразований получаем, что

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}} = \left\langle \frac{\delta S}{\delta \mathbf{V}} + \frac{\delta S_{gf}}{\delta \mathbf{V}} + \frac{\delta S_{gh}}{\delta \mathbf{V}} + \frac{\delta S_b}{\delta \mathbf{V}} \right\rangle, \quad (12)$$

где

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{V}^A} = \frac{1}{2e} \text{Re tr } T^A D^a (e^{2V'} W'_a e^{-2V'}); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{gf}}{\delta \mathbf{V}^A} &= \frac{1}{16e} \text{tr } T^A \left([V, \bar{D}^2 D^2 V] - [V, D^2 \bar{D}^2 V] + \right. \\ &\quad \left. + 2[D^2 V, \bar{D}^2 V] \right); \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{gh}}{\delta \mathbf{V}^A} &= -e \text{Im} \left((\bar{c} + \bar{c}^+) \left(\frac{2V}{1 - e^{-2V}} \right)_{Ad} T_{Ad}^A c - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{c} - \bar{c}^+) T_{Ad}^A \left(\frac{2V}{1 - e^{-2V}} \right)_{Ad} c \right); \quad (15) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta S_b}{\delta \mathbf{V}^A} = \frac{e}{4} b_0^+ (T_{Ad}^A e^{2V_{Ad}} + e^{2V_{Ad}} T_{Ad}^A) b_0, \quad (16)$$

где $(T^A)_{BC} = -if^{ABC}$ — генераторы присоединенного представления калибровочной группы, а W'_a — тензор напряженности, построенный по полю V' , который удовлетворяет тождеству Бьянки [1]:

$$D^a W'_a - \{W'^a, e^{-2V'} D_a e^{2V'}\} = \bar{D}^a (e^{-2V'} \bar{W}'_a e^{2V'}),$$

где $\bar{W}'_a = -D^2 (e^{2V'} \bar{D}_a e^{-2V'}) / 8$.

В уравнении (12) содержатся корреляторы, которые достаточно сложно вычислить точно во всех порядках теории возмущений. При этом наибольшую сложность представляет нелинейный оператор, который стоит в правой части формулы (13). Однако при калибровочных преобразованиях он меняется по закону

$$\begin{aligned} \text{tr } T^A D^a (e^{2V'} W'_a e^{-2V'}) &\rightarrow \\ &\rightarrow (e^{-i\Lambda_{Ad}^+})^{AB} \text{tr } T^B D^a (e^{2V'} W'_a e^{-2V'}), \quad (17) \end{aligned}$$

что при переходе к квантовой теории существенно ограничивает структуру его вакуумного среднего. Возможно, что для вычисления этого вакуумного среднего необходимо, как и при исследовании вклада суперполей материи, ввести некоторые дополнительные источники, которые позволили бы записать рассматриваемый оператор в несколько более простом виде. В настоящее время эта работа находится в стадии исследования.

Заключение

Построенные в этой работе уравнения Швингера–Дайсона для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса можно рассматривать в качестве исходной точки для исследования вклада калибровочных полей и духов в функцию Гелл–Манна–Лоу точно во всех порядках теории возмущений. Такое исследование должно также использовать тождества Славнова–Тейлора. Однако для его проведения необходимо преодолеть сложности, связанные с бесконечным числом эффективных диаграмм Фейнмана, которое следует из неполиномиальности действия.

Литература

1. Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию, М., 1989.
2. Novikov V., Shifman M., Vainstein A., Zakharov V. // Phys. Lett. 1985. **166B**. P. 329.
3. Avdeev L., Tarasov O. // Phys. Lett. 1982. **112B**. P. 356.
4. Jack I., Jones D., North C. // Nucl. Phys. 1996. **B473**. P. 308.
5. Jack I., Jones D., North C. // Phys. Lett. 1996. **386B**. P. 138.
6. Mas J., Perez-Victoria M., Seijas C. // JHEP. (2002). **0203**. P. 049.
7. Славнов А. // ТМФ. 1975. **23**. С. 3.
8. Bakeyev T., Slavnov A. // Mod. Phys. Lett. 1996. **A11**. P. 1539.
9. West P. // Nucl. Phys. 1986. **B268**. P. 113.
10. Soloshenko A., Stepanyantz K. // E-print: hep-th/0203118.
11. Солошенко А., Степаньянц К. // ТМФ. 2003. **134**. С. 429.
12. Солошенко А., Степаньянц К. // ТМФ. 2004. **140**. С. 437.
13. Степаньянц К. // ТМФ. 2005. **142**. С. 37.
14. Степаньянц К. // ТМФ. 2007. **150**. С. 442.
15. Пименов А., Степаньянц К. // ТМФ. 2006. **147**. С. 290.
16. Степаньянц К. // ТМФ. 2006. **146**. С. 385.
17. Pimenov A., Stepanyantz K. // E-print: hep-th/0707.4006.
18. Gates J., Grisaru M., Rocek M., Siegel W. // Front. Phys. 1983. **58**. P. 1.